Domaine de méromorphie maximal et frontière naturelle de produits eulériens uniformes d'une ou de plusieurs variables

Ludovic Delabarre

Laboratoire de Mathématiques LaMUSE
de l'Université de Saint-Etienne

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE SAINT-ÉTIENNE

École Doctorale Sciences, Ingénierie, Santé ED SIS 488

par

Ludovic DELABARRE

sous la direction de Driss ESSOUABRI

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

Domaine de méromorphie maximal et frontière naturelle de produits eulériens uniformes d'une ou de plusieurs variables

soutenue le 29 Novembre 2010

Après avis de :

Ben LICHTIN, Professeur,	Université de Rochester (USA)	**Rapporteur**
Kohji MATSUMOTO, Professeur,	Université de Nagoya (JAPON)	**Rapporteur**
Boris MOROZ, Professeur,	Institut Max-Planck (ALLEMAGNE)	**Rapporteur**

Devant la commission d'examen formée de :

Driss ESSOUABRI, Professeur,	Université de Saint-Etienne	**Directeur**
François HENNECART, Professeur,	Université de Saint-Etienne	**Examinateur**
Stéphane LOUBOUTIN, Professeur,	Institut Luminy, Marseille	**Examinateur**
Boris MOROZ, Professeur,	Institut Max-Planck (ALLEMAGNE)	**Examinateur**
Alexei PANTCHICHKINE, Professeur,	Institut Fourier, Université de Grenoble	**Examinateur**
Federico PELLARIN, Professeur,	Université de Saint-Etienne	**Examinateur**

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude envers Driss Essouabri pour m'avoir proposé un sujet passionnant, pour avoir accepté de diriger mon travail de thèse et pour sa disponibilité sans faille tout le long de ces quatre années et surtout pour avoir su me faire partager son expérience scientifique et sa vision à long terme de son domaine de recherche avec beaucoup d'humanité. Il a été témoin de mon évolution sur le plan scientifique et je tiens en particulier à le remercier pour ses précieux conseils en ce qui concerne la rédaction.

Durant cette thèse j'ai eu l'opportunité d'échanger quelques propos fructueux avec Ben Lichtin que je tiens à remercier vivement pour toutes les heures qu'il m'a consacrées. Il a accepté la lourde tâche d'être rapporteur de cette thèse. Sa lecture minutieuse et ses nombreuses remarques ont apporté beaucoup de clarté au manuscrit.

Je suis également sincèrement reconnaissant envers Kohji Matsumoto qui m'a fait l'honneur d'accepter de rapporter sur ma thèse. J'ai eu la chance de le rencontrer plusieurs fois accompagné de Yasushi Komori et de Hirofumi Tsumura à l'occasion de leur venue en France pour participer aux ateliers franco-japonais. J'ai retiré beaucoup de satisfactions de ces rencontres en partageant des discussions enrichissantes tant sur le plan scientifique que sur le plan humain.

C'est pour moi un privilège que Boris Moroz, auteur de résultats fondamentaux dans les domaines où s'inscrit ma thèse, ait accepté de rapporter sur mon travail. Ses remarques précieuses et pertinentes ont permis de mettre en lumière certains points non triviaux, et de ce fait ont amélioré la qualité et l'accessibilité du manuscrit. Je suis également très heureux qu'il fasse partie de mon jury de thèse et je lui suis très reconnaissant qu'il ait pris le temps de se déplacer pour assister à ma soutenance.

Je remercie François Hennecart, Stéphane Louboutin, Alexei Pantchichkine et Federico Pellarin pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mon travail et pour le temps qu'ils m'ont consacré en acceptant de faire partie de mon jury de thèse.

J'ai eu l'opportunité d'effectuer mes trois premières années de thèse en tant qu'allocataire et moniteur au laboratoire de mathématique Nicolas Oresme (LMNO) de l'Univesité de Caen. C'est à ce titre que je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers toutes les personnes que j'ai pu y cotoyer, notamment Philippe Toffin, Jean-Paul

Bézivin, Denis Simon, Jean-Marc Guerrier, Brigitte Vallée, Vincent Bosser. Je tiens également à remercier Gabriele Ranieri, Patrick Rabarison, Erwan Le Yaouanc, Corentin Pontreau, Camille Mevel, Laurent Demonet, Julien Riton, Oswaldo Velásquez Castañón, Mohammed Ali Popa, Sylla Lesseni, Chloé Perrin, Marc Autord, Emmanuel Delsinne, Pierre, Florence et Catherine Gilibert, Jean Fromentin pour la bonne ambiance qu'ils m'ont apporté au sein du LMNO. J'exprime également toute ma reconnaissance envers les personnes qui ont partagé mon bureau à Caen, à savoir Mathieu Roux et Louis Leroux, pour leur sympathie, leur patience, leur soutien et leurs nombreuses discussions. Je tiens aussi à remercier les secrétaires pour leur aide en ce qui concerne les démarches administratives.

Ma dernière année de thèse s'est déroulée au laboratoire de mathématiques LaMuse de l'Université de Saint-Etienne. Je tiens à remercier les membres du laboratoire pour leur accueil chaleureux, en particulier François Foucault, Georges Grekos, Olivier Robert, François Hennecart, Federico Pellarin, Rachel Taillefer et mes collègues de bureau Hamza Guebbai et Boualem Saadaoui. Je tiens également à remercier les membres du secrétariat du LaMuse.

Je remercie bien sûr toute ma famille, mes parents, mes frères qui m'ont soutenu tout le long de ces années de thèse.

Enfin, il n'existe pas de mot pour qualifier ce que je ressens pour celle qui a toujours été présente en particulier dans les moments difficiles, pour sa patience, son amour, son formidable soutien ; je veux bien sûr parler d'Anamaria sans qui je ne serai pas arrivé jusque là.

L'homme n'est qu'un roseau, le plus faible de la nature ; mais c'est un roseau pensant. Il ne faut pas que l'univers entier s'arme pour l'écraser : une vapeur, une goutte d'eau, suffit pour le tuer. Mais, quand l'univers l'écraserait, l'homme serait encore plus noble que ce qui le tue, parce qu'il sait qu'il meurt, et l'avantage que l'univers a sur lui ; l'univers n'en sait rien. Toute notre dignité consiste donc en la pensée. C'est de là qu'il faut nous relever et non de l'espace et de la durée, que nous ne saurions remplir. Travaillons donc à bien penser : voilà le principe de la morale.

B. Pascal, *Pensées* (1670)

Table des matières

Première partie

Rédaction française.

Chapitre 1

Introduction et présentation des résultats.

1.1 Introduction.

Cette thèse a pour objet l'étude du domaine maximal de méromorphie de produits eulériens uniformes d'une ou de plusieurs variables.

On entend par "produit uniforme" la sous-classe des séries de Dirichlet multivariables composées des fonctions suivantes :

Définition 1. On dit que $Z(s_1, \ldots, s_n)$ est un produit eulérien uniforme s'il existe une région $\Omega \subseteq \mathbf{C}^n$ et un polynôme $h \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ à coefficients entiers (vérifiant $h(\mathbf{0}) = 1$) telle que pour tout $(s_1, \ldots, s_n) \in \Omega$ on a l'égalité :

$$Z(s_1, \ldots, s_n) = \prod_{p \text{ premier}} h\left(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}\right).$$

Etant donné un tel produit uniforme $Z(s_1, \ldots, s_n)$, la question consiste donc à déterminer le domaine $\mathbf{C}^n \supseteq \Omega' \supseteq \Omega$ maximal pour l'inclusion tel qu'il existe un prolongement méromorphe de Z dans Ω'.

En particulier on s'intéresse sur la possibilité d'avoir $\Omega' \subsetneq \mathbf{C}^n$; et si tel est le cas on veut décrire de façon précise la frontière de méromorphie (ou frontière naturelle) au-delà de laquelle aucun prolongement méromorphe n'est possible.

Dans les années 1920, E. Landau et A. Walfisz ([21]) démontrèrent que la fonction f définie pour $\Re(s) > 1$ par

$$f(s) = \sum_{p \text{ premier}} p^{-s}$$

se prolonge de façon méromorphe dans $\{s \in \mathbf{C} : \Re(s) > 0\}$ et que la droite $\{s \in \mathbf{C} : \Re(s) = 0\}$ est une frontière naturelle de méromorphie.

Quelques années plus tard, T. Estermann ([12]) caractérisa de façon précise les produits eulériens d'une variable $Z(s) = \prod_p \ h(p^{-s})$, déterminés par un polynôme $h(X) \in \mathbf{Z}[X], h(0) = 1$ qui admettent un prolongement méromorphe à tout $\mathbf{C}$. De plus, Estermann montra que les produits ne satisfaisant pas cette propriété admettent l'axe imaginaire comme frontière naturelle de méromorphie :

Théorème. (Estermann**).**
Soit $h(X) = 1+\sum_{m=1}^{r} b_m X^m = \prod_{m=1}^{r} (1-\alpha_m X) \in \mathbf{Z}[X]$. *Soit* $f(s) = \prod_p h(p^{-s})$ *qui converge pour* $\Re(s) > 1$. *Alors :*

(i) $f(s)$ *se prolonge de façon méromorphe jusque* $\Re(s) > 0$.

(ii) *Si* $|\alpha_m| = 1 \ \forall m = 1, .., r$, *alors* $f(s)$ *se prolonge de façon méromorphe à tout* $\mathbf{C}$. *Sinon,* $\Re(s) = 0$ *est une frontière naturelle pour* f *(i.e. pour chaque point* $s = it$ *de l'axe vertical, il n'existe pas de prolongement méromorphe de* f *à aucun voisinage* $\mathcal{B}(it)$ *de* it*).*

Plus tard, G. Dhalquist (voir [8]) généralisa ce résultat au cas où h est une fonction entière avec des singularités isolées à l'intérieur du cercle unité.

Plus de trente ans plus tard, Kurokawa et Moroz ([15], [16], [17], [18], [19], [24], [25]) ont étendu le résultat aux polynômes h dont les coefficients sont des combinaisons linéaires entières de nombres complexes qui dépendent des traces d'une certaine classe de représentations d'un groupe topologique.

A partir des années 80, F.J. Grunewald, M. du Sautoy, D. Segal, G.C. Smith entre autres ([9], [10], [11], [13]) étudient une classe de fonctions zêta associée à un groupe ou un anneau :

Définition 2 ([9])**.** Etant donné un groupe G, on appelle $\zeta_G(s)$ la fonction zêta associée à G la fonction suivante (définie formellement) :

$$\zeta_G(s) = \sum_{H \leq G} \frac{1}{|G : H|^s}.$$

(la somme étant prise sur les sous-groupes H d'indice fini)

Lorsque le groupe G est finiment engendré, la quantité suivante

$$a_n(G) = \text{Card}\{H : H \leq G \text{ et } |H : G| = n\}$$

est finie pour tout n et $\zeta_G(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(G)}{n^s}$ est une série de Dirichlet.

On vérifie de plus que lorsque G est nilpotent $\zeta_G(s)$ peut même s'écrire sous la forme d'un produit eulérien.

Dans certains cas et notamment lorsque G est finiment engendré, nilpotent de classe de nilpotence 2 et sans torsion (Grunewald, Segal, Smith), $\zeta_G(s)$ est un produit eulérien uniforme non homogène ; c'est à dire qu'il existe un polynôme $W \in \mathbf{Z}[X,Y]$ tel que

$$\zeta_G(s) = \prod_{p \text{ premier}} W(p^{-s}, p).$$

Cela a conduit du Sautoy et Z. Rudnick à formuler la conjecture suivante :

Conjecture 1. Soit $W(X,Y) \in \mathbf{Z}[X,Y]$ et soit $Z(s) = \prod_{p \text{ premier}} W(p^{-s}, p)$.

Alors $Z(s)$ admet un prolongement méromorphe à tout $\mathbf{C}$ si et seulement si W est un produit de facteurs cyclotomiques : il existe m, des polynômes cyclotomiques $g_i(U)$ (i.e. des diviseurs de $\left(1 - U^{d_i}\right)^{n_i}$) et des entiers b_i et c_i ($i = 1, \ldots, m$) tels que $W(X,Y) = \prod_{i=1}^m g_i\left(X^{b_i} Y^{c_i}\right)^{\pm 1}$.

Du Sautoy a montré ce résultat dans certains cas ou en ajoutant des hypothèses supplémentaires sur les zéros de la fonction zêta de Riemann ; cependant le problème en toute généralité reste ouvert à ce jour.

Dans cette thèse on montrera les résultats suivants :

1. On démontre, sous une hypothèse de régularité du polynôme h (voir définition 5 ci-dessous), **l'exacte généralisation multivariable du théorème d'Estermann** en explicitant complètement la frontière naturelle au sens fort lorsque h n'est pas cyclotomique (au sens de la définition 3) : on montre précisément qu'**aucun prolongement méromorphe n'est possible à un domaine contenant n'importe quel point de cette frontière**.
2. On introduit **l'analogue multivariable de la conjecture 1** en considérant les produits de la forme $(s_1, \ldots, s_n) \longmapsto \prod_p h\left(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c}\right)$ (où $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$) et **on détermine la frontière naturelle de cette classe de fonctions lorsque le polynôme h n'est pas cyclotomique et vérifie une condition de régularité analytique (voir la définition 5)** (ces produits étant méromorphes sur $\mathbf{C}^n$ si h est cyclotomique)
3. On **répond à un problème posé par Kurokawa et Ochiai** dans [20] **concernant le domaine maximal de méromorphie de la fonction zêta d'Igusa** $Z^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}]) = \sum_{m_1,\ldots,m_n \geq 1} \frac{\varphi(m_1 \cdots m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}}$ **en déterminant complètement sa frontière naturelle au sens fort** (c'est à dire qu'aucun prolongement méromorphe n'est possible au-delà de tout point de cette frontière).

1.2 Enoncés des principaux résultats.

Etant donné deux entiers r et n on considère :

$$h\left(X_1,\ldots,X_n\right)=1+a_1X_1^{\alpha_1^1}X_2^{\alpha_1^2}\cdots X_n^{\alpha_1^n}+\ldots+a_rX_1^{\alpha_r^1}X_2^{\alpha_r^2}\cdots X_n^{\alpha_r^n};$$

$$Z\left(\mathbf{s}\right)=\prod_p h\left(p^{-s_1},p^{-s_2},\ldots,p^{-s_n}\right)\text{ for }\mathbf{s}=\left(s_1,\ldots,s_n\right)\in\ \mathbf{C}^n,$$

où a_j pour $j=1,\ldots,r$ sont des entiers et α_j^ℓ pour $j=1,2,\ldots,r$ et $l=1,\ldots,n$ sont des entiers positifs.

La définition suivante généralise la notion de cyclotomie pour un polynôme de plusieurs variables.

Définition 3. On dit que $h\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ est cyclotomique si et seulement s'il existe un sous-ensemble fini I de $\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ tel que :

$$h\left(X_1,\ldots,X_n\right)=\prod_{\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in I}\left(1-X_1^{\lambda_1}\cdots X_n^{\lambda_n}\right)^{\gamma(\lambda)},$$

où $\gamma\left(\lambda\right)\in\mathbf{Z}$ pour chaque $\lambda\in I$.

Ainsi lorsque le polynôme $h\in\mathbf{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ est cyclotomique, le produit eulérien associé

$$Z(s_1,\ldots,s_n)=\prod_p h(p^{-s_1},\ldots,p^{-s_n})=\prod_{\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in I\ \text{fini}}\zeta\left(\lambda_1s_1+\cdots+\lambda_ns_n\right)^{-\gamma(\lambda)};$$

et se prolonge donc de façon méromorphe à tout $\mathbf{C}^n$ en tant produit fini de fonctions zêta méromorphes sur $\mathbf{C}^n$.

On vérifie qu'en réalité c'est le seul cas où le produit $Z(s_1,\ldots,s_n)$ s'étend méromorphiquement à tout $\mathbf{C}^n$. En effet, si h n'est pas cyclotomique, une frontière de méromorphie apparaît et généralise la droite $\Re(s)=0$ frontière naturelle introduite par Estermann pour les produits d'une variable.

Cependant, la géométrie de cette frontière est plus complexe.

Définition 4. On suppose que h n'est pas cyclotomique et ne contient aucun facteur cyclotomique.

Pour tout $\delta\geq 0$ on pose :

$$W\left(\delta\right)=\left\{\mathbf{s}\in\mathbf{C}^n:\langle\sigma,\alpha_j\rangle>\delta,\forall j\in\{1,\ldots,r\}\right\}.$$

où $\alpha_j=\left(\alpha_j^1,\ldots,\alpha_j^n\right)$, $\sigma=\left(\Re(s_1),\ldots,\Re(s_n)\right)$ et $\langle .,.\rangle$ désigne le produit scalaire classique.

On peut tout d'abord observer que $Z(\mathbf{s})$ définit une fonction holomorphe en $\mathbf{s}$ dans le domaine $\langle\sigma,\alpha_j\rangle > 1, (j=1,\ldots,r)$.

Dans [2], G. Bhowmik, D. Essouabri et B. Lichtin ont montré qu'il existe un prolongement méromorphe de $Z(\mathbf{s})$ à $W(0)$. Leur méthode consiste essentiellement à factoriser pas à pas le produit eulérien par des facteurs zêta (qui eux se prolongent méromorphiquement sur tout $\mathbf{C}^n$) de façon à pousser le domaine de convergence absolu du produit jusque $W(\delta)$ pour tout $\delta > 0$.

Ils démontrèrent de plus que le point $t = 0$ est un point d'accumulation de zéros ou de singularités de $t \longmapsto Z(t\theta)$ pour presque toutes les directions θ ; et par conséquent il n'est pas possible d'avoir un prolongement méromorphe de $Z(\mathbf{s})$ jusque $W(\delta)$ pour tout $\delta < 0$ (voir le théorème 6 page 28 au chapitre 2).

Ceci est une première avancée concernant le domaine de méromorphie maximal de produits eulériens de plusieurs variables.

Le résultat principal de cette thèse consiste justement à vérifier que $\partial W(0)$ est exactement la frontière naturelle de $Z(\mathbf{s})$ lorsque h n'est pas cyclotomique et que $\partial W(0)$ est à faces non dégénérées (voir la définition 5).

Présentons succinctement les différents chapitres constituant cette thèse.

Chapitre 2.

Le chapitre 2 est consacré à la preuve du théorème principal de cette thèse.

Avant d'énoncer le résultat, nous allons d'abord introduire une définition.

Comme $W(0) = \{\mathbf{s} \in \mathbf{C}^n : \Re(\langle \mathbf{s},\alpha_j\rangle) \geq 0, \forall j = 1,\ldots,r\}$, alors $\partial W(0)$ est un polyèdre dont les faces sont de la forme :

$$\mathcal{F}(\alpha_e) = \{\mathbf{s} \in \overline{W(0)} : \Re(\langle \mathbf{s},\alpha_e\rangle) = 0\};$$

pour un vecteur $\alpha_e \in \{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$.

On dira par abus de langage que $\mathcal{F}(\alpha_e)$ est une face de vecteur polaire α_e[1].

Soit maintenant $\mathcal{F}(\alpha_e)$ une face de $\partial W(0)$ comme ci-dessus et considérons en particulier $\widehat{\alpha}_e \in \mathbf{N}^n, \widehat{\alpha}_e \in \mathbf{Q}\alpha_e$ le vecteur colinéaire à α_e dont les composantes non nulles sont premières entre elles.

On pose également :

$$\Lambda_e := \{j \in \{1,\ldots,r\} : \alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e\}.$$

Il est clair que pour tout $j \in \Lambda_e$ il existe $q_j \in \mathbf{N}^*$ tel que $\alpha_j = q_j\widehat{\alpha}_e$.

On définit alors :

$$\begin{aligned}
[h]_e(\mathbf{X}) &:= 1 + \sum_{\alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_j \mathbf{X}^{\alpha_j} \\
\widetilde{[h]}_e(T) &:= 1 + \sum_{\alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_j T^{q_j} \in \mathbf{Z}[T] \text{ vérifiant } \widetilde{[h]}_e(\mathbf{X}^{\widehat{\alpha}_e}) = [h]_e(\mathbf{X}).
\end{aligned}$$

[1]En réalité α_e est un vecteur polaire de $\mathcal{F}(\alpha_e) \cap \mathbf{R}^n = \{\mathbf{x} \in \overline{W(0)} \cap \mathbf{R}^n : \langle \mathbf{x},\alpha_e\rangle = 0\}$.

Définition 5. On dira que la face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ est une face non dégénérée si le polynôme d'une variable $\widetilde{[h]}_e(T)$ n'a pas de racine multiple.

Théorème principal.
On suppose que h n'est pas cyclotomique et qu'il existe un vecteur α_e ($e \in \{1, \dots, r\}$) tel que la face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ de $\partial W(0)$ soit non dégénérée au sens de la définition 5. Soit $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e)$. Alors $Z(\mathbf{s})$ n'admet de prolongement méromorphe à aucune boule ouverte $\mathcal{B}$ centrée en $\mathbf{s}^0$.

Corollaire.
Si h n'est pas cyclotomique et si toutes les faces de $\partial W(0)$ sont non dégénérées, alors $\partial W(0)$ est la frontière naturelle de $Z(\mathbf{s})$ dans le sens que pour tout $\mathbf{s}^0 \in \partial W(0)$, $Z(\mathbf{s})$ ne se prolonge méromorphiquement à aucune boule ouverte $\mathcal{B}$ centrée en $\mathbf{s}^0$.

Remarque 1. Au cours de la preuve du théorème principal on introduit une nouvelle classe dite de "polynômes généralisés" qui étend la classe des polynômes de deux variables et il a été nécessaire de développer une théorie de Puiseux pour cette classe.

Cependant, la théorie de Puiseux classique pour les polynômes de deux variables s'adapte mal aux polynômes généralisés car le fait qu'il ne s'agisse pas de fonctions régulières engendre des problèmes de définition et de convergence des solutions.

C'est la raison pour laquelle on a besoin d'une hypothèse de non-dégénérescence des faces de $\partial W(0)$ qui est vérifiée pour la plupart des polynômes h pour pallier cette difficulté.

Chapitre 3.

Au cours du chapitre 3 on précisera la signification du concept de "frontière naturelle" en examinant l'obstruction empêchant un éventuel prolongement au-delà de $\partial W(0)$.

On montrera premièrement que dans certains cas il peut exister un prolongement sur le bord $\partial W(0)$ de $W(0)$.

D'autre part, on discutera sur l'éventualité d'avoir un prolongement au-delà de $\partial W(0)$ de dimension complexe (resp. réelle) strictement inférieure à n (resp. $2n$).

On sera amené à considérer des prolongements sur une hypersurface réelle (de dimension réelle $2n-1$) coupant transversalement $\partial W(0)$. On fera pour cela appel à la théorie des fonctions C-R (Cauchy-Riemann) sur une hypersurface réelle qui généralise la notion d'holomorphie sur les ouverts de $\mathbf{C}^n$ (voir la définition 17). On montrera en particulier qu'aucun prolongement C-R analytique réel au-delà de $\partial W(0)$ défini sur une hypersurface analytique réelle n'est possible :

Théorème 1. *On suppose que h n'est pas cyclotomique et que $\partial W(0)$ admet au moins une face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ non dégénérée au sens de la définition 5.*

Alors $\mathcal{F}(\alpha_e) \subseteq \partial W(0)$ est une frontière naturelle de $Z(\boldsymbol{s})$ dans le sens qu'il n'existe pas de prolongement C-R analytique réel défini sur une hypersurface analytique réelle qui intersecte $\mathcal{F}(\alpha_e)$.

On obtient ainsi un résultat allant dans le sens de la conjecture 1 en posant $(p^{-s_1}, p^{-s_2}) = (p, p^{-s})$ et en appliquant ce théorème à $Z(s_1, s_2)$ (voir §3.3).

Chapitre 4.

Une première application (reprise essentiellement de [2]) des résultats obtenus dans les chapitres précédents sera donnée dans ce chapitre.

On considérera une variété torique projective X dont on aura fait un plongement dans l'espace projectif déterminé par un ensemble de d monômes définissant des équations de n variables.

L'ensemble des exposants des monômes définissant X détermine une matrice $\mathbf{A}$ $d \times n$ à coefficients entiers, dont les colonnes $\mathbf{a}_j = (a_{j,1}, \ldots, a_{j,n})$ satisfont chacune la propriété :

$$\sum_i a_{j,i} = 0.$$

Les points rationnels de la variété sont définis de la façon suivante :

$$X(\mathbf{A}) = \left\{ (x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{Q}) : \prod_{\{i : a_{j,i} \geq 0\}} x_i^{a_{j,i}} = \prod_{\{i : a_{j,i} < 0\}} x_i^{-a_{j,i}} \ \forall j \right\};$$

et son tore maximal $U(\mathbf{A})$ est :

$$U(\mathbf{A}) = \{(x_1 : \ldots : x_n) \in X(\mathbf{A}) : x_1 \cdots x_n \neq 0\}.$$

On définit alors une fonction zêta associée aux points rationnels d'une telle variété en remarquant premièrement qu'à chacun de ces points rationnels on peut lui associer un unique point à coordonnées entières positives premières entre elles.

On construit ensuite une fonction caractéristique $F_{\mathbf{A}} : \mathbf{N}^n \longrightarrow \{0, 1\}$ valant 1 si et seulement si $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{N}^n$ se trouve sur $U(\mathbf{A})$ (i.e. $\prod_i m_i^{a_{j,i}} = 1 \ \forall j \leq d$) et $pgcd(m_1, \ldots, m_n) = 1$.

De cette façon on définit la série de Dirichlet associée à cette fonction caractéristique :

$$Z_{\mathbf{A}}(\mathbf{s}) := \sum_{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{N}^n_{\geq 1}} \frac{F_{\mathbf{A}}(m_1, \ldots, m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}} = \prod_p h_{\mathbf{A}}(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}),$$

et on vérifie d'autre part que cette fonction caractéristique est multiplicative et que la série de Dirichlet correspondante peut se réécrire sous la forme d'un produit eulérien uniforme de plusieurs variables.

Cette classe de fonctions zêta apparaît dans des problèmes de comptage de points rationnels sur des variétés toriques. En effet, $F_{\mathbf{A}}$ permet d'associer une série de Dirichlet à une variété torique et par conséquent de donner une estimation asymptotique quand t tend vers l'infini de la fonction de comptage $N(U(\mathbf{A}); t) := \#\{\mathbf{x} \in U(\mathbf{A}) : \max_i (m_i(\mathbf{x})) \leq t\}$ en utilisant des théorème taubériens.

Plusieurs travaux dans cette direction ([5], [4], [2], [6],..) ont permis d'obtenir des estimations asymptotiques très précises de la fonction de comptage des points rationnels $N(U(\mathbf{A}); t)$ en étudiant leur fonction zêta des hauteurs et en la reliant à cette classe de fonctions zêta multivariables associées aux fonctions caractéristiques.

Il se trouve (voir §2 de [2]) que l'on parvient à se ramener à un produit eulérien uniforme associé à un *polynôme* de plusieurs variables, on peut donc par conséquent appliquer les résultats précédents pour décrire complètement la frontière naturelle lorsqu'elle existe de cette classe de série de Dirichlet associée à une variété torique projective.

Chapitre 5.

On présentera dans ce chapitre une autre application en introduisant un analogue multivariable de la conjecture 1.

De façon précise, on considèrera le domaine maximal de méromorphie d'un produit eulérien de la forme :

$$Z(\mathbf{s}) := Z(s_1, \ldots, s_n) = \prod_{p \text{ premier}} h\left(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c}\right) := Z^{n+1}(s_1, \ldots, s_n, c),$$

où $n > 1$, $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ est un entier non nul et $h(X_1, \ldots, X_{n+1}) \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$.

Il faut souligner l'apparition naturelle d'une hypothèse supplémentaire qui permet de distinguer la conjecture de Rudnick-du Sautoy de son analogue multivariable puisqu'a priori cet analogue multivariable contient la conjecture elle-même.

On supposera donc que

$$\operatorname{Rang}\left(\alpha_j^{(n)}, j \in \{1, \ldots, r\}\right) > 1. \tag{1.1}$$

Ce qui a principalement motivé ce chapitre est la résolution d'un problème posé par N. Kurokawa and H. Ochiai.

Si A est un anneau, la fonction zêta multivariable d'Igusa se définit de la façon suivante (pour $n > 1$) :

$$Z^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; A) := \sum_{m_1,\ldots,m_n \geq 1} \left| \text{Hom}_{\text{ring}} \left(A, \frac{\mathbf{Z}}{m_1 \cdots m_n \mathbf{Z}} \right) \right| m_1^{-s_1} \cdots m_n^{-s_n}.$$

D'après le théorème chinois, nous savons que cette fonction zêta s'écrit sous la forme d'un produit eulérien :

$$Z^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; A) = \prod_p Z_p^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; A)$$

où

$$Z_p^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; A) = \sum_{k_1,\ldots,k_n \geq 0} \left| \text{Hom}_{\text{ring}} \left(A, \frac{\mathbf{Z}}{p^{k_1+\cdots+k_n} \mathbf{Z}} \right) \right| p^{-k_1 s_1 - \cdots - k_n s_n}.$$

On démontrera deux résultats complémentaires concernant la frontière naturelle de $\prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c})$ qui dépendent de la validation (ou non) d'une hypothèse que l'on note (H) (voir le théorème 2).

On montrera que lorsque cette propriété (H) est satisfaite, on est capable de déterminer dans un sens fort la frontière naturelle (voir le théorème 2) tandis que lorsque ce n'est pas le cas, la frontière naturelle est obtenue mais dans un sens plus faible (voir le théorème 3) : il n' existera pas de prolongement méromorphe si l'on translate globalement la frontière $\partial W(0)$ vers la gauche.

Théorème 2. *Soit $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ et*

$$Z(\boldsymbol{s}) = \prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c}).$$

On suppose que le polynôme $h(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$ n'est pas cyclotomique, ne contient pas de facteur cyclotomique, admet au moins une face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ non dégénérée au sens de la définition 5, vérifie (1.1) et satisfait de plus la propriété (H) suivante :

$$\textit{pour tout } j \in \{1, \ldots, r\} \textit{ tel que } \alpha_j \notin \mathbf{Q}\alpha_e,\ (\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^n) \notin \mathbf{Q}(\alpha_e^1, \ldots, \alpha_e^n).$$

Alors $\mathcal{F}(\alpha_e) \bigcap \{s_{n+1} = c\} \subseteq \partial W(0) \bigcap \{s_{n+1} = c\}$ est une frontière naturelle (au sens fort) de $Z(\boldsymbol{s})$: $Z(\boldsymbol{s})$ se prolonge de façon méromorphe à $W(0) \bigcap \{s_{n+1} = c\}$ et il n'existe pas de prolongement méromorphe de $Z(\boldsymbol{s})$ à tout domaine contenant une boule ouverte $\mathcal{B}$ (de dimension n) centrée en un point $\boldsymbol{s}^0$ tel que $(\boldsymbol{s}^{0(n)}, c) \in \mathcal{F}(\alpha_e)$.

Théorème 3. *Soit $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ et*

$$Z(\boldsymbol{s}) = \prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c}).$$

On suppose que le polynôme $h(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$ n'est pas cyclotomique, ne contient aucun facteur cyclotomique, admet au moins une face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ non dégénérée au sens de la définition 5, vérifie (1.1) mais ne satisfait pas la propriété (H) du théorème 2.

On suppose de plus la propriété suivante :

si $\alpha_{j_0}^{(n)} \notin \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$ alors les polynômes $1 + \sum_{\alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_j \boldsymbol{X}^{\alpha_j}$ et $\sum_{j : \alpha_j - \alpha_{j_0} \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_j \boldsymbol{X}^{\alpha_j}$ sont premiers entre eux.

Alors $\partial W(0) \bigcap \{s_{n+1} = c\}$ est une frontière naturelle (au sens faible) de $Z(\boldsymbol{s})$: $Z(\boldsymbol{s})$ n'admet pas de prolongement méromorphe à $W(\delta) \bigcap \{s_{n+1} = c\}$ pour tout $\delta < 0$.

On répondra en particulier à un problème posé par Kurokawa et Ochiai (voir [20]) concernant le domaine maximal de méromorphie de la fonction zêta d'Igusa $Z^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}])$ qui se définit de la façon suivante :

$$Z^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}]) = \sum_{m_1, \ldots, m_n \geq 1} \frac{\varphi(m_1 \cdots m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}},$$

où φ désigne la fonction d'Euler classique.

On obtiendra ainsi le résultat suivant qui explicite complètement la frontière naturelle au sens fort de $Z^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}])$:

Théorème 4. *Le domaine maximal de méromorphie $\mathcal{M}$ de la fonction zêta d'Igusa :*

$$Z^{ring}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}]) = \sum_{m_1, \ldots, m_n \geq 1} \frac{\varphi(m_1 \cdots m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}}$$

est donné par :

$$\text{For all } I \subseteq \{1, \ldots, n\}, \sum_{i \in I} \sigma_i > -1 + \#I.$$

En particulier, si $s^0 \in \partial\mathcal{M}$, alors il n'existe pas de prolongement méromorphe de $Z^{ring}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}])$ à tout domaine contenant une boule ouverte $\mathcal{B}$ de dimension n centrée en s^0.

Appendice

Deux chapitres seront donnés en appendice et le second ne sera donné qu'en français.

Ces chapitres présentent un intérêt qui leur permet de figurer dans la thèse. Cependant, ils ne constituent pas la partie fondamentale où sont démontrés les principaux résultats de cette thèse.

Annexe A.

On s'intéressera dans ce chapitre à un cas particulier où d'autres méthodes alternatives seront développées pour démontrer le théorème principal du chapitre 2. On verra en particulier que ces méthodes illustrent toutes le rôle très important joué par les parties $[h]_e$ de h pour $e \in \{1, \ldots, r\}$ (voir la définition 10) dans l'accumulation de zéros ou de pôles au voisinage de la frontière.

Une telle partie $[h]_e$ de h se ramène en fait à un polynôme d'une variable formé en ne conservant que certains termes de h (ceux dont les exposants sont parallèles à α_e). De cette façon, on obtient une approximation locale au voisinage de l'hyperplan de la frontière perpendiculaire à α_e du produit eulérien multivariable déterminé par h par un produit eulérien d'une variable déterminé par $[h]_e$.

Annexe B.

Ce chapitre est indépendant des précédents.

On étendra le théorème d'Estermann à une autre classe de produits eulériens associés à un pseudo-polynôme d'une variable (i.e. à une fonction de la forme $h(X) = 1 + \sum_{j=1}^{r} a_j X^{\alpha_j}$ où les $a_j \in \mathbf{Z}$ et les α_j sont des réels strictement positifs).

On considérera en particulier le cas où les exposants $\alpha_j > 0$ sont $\mathbf{Q}$-algébriquement indépendants.

Le principal intérêt de ce chapitre est de souligner une fois encore l'un des points fondamentaux et récurrents de cette thèse, à savoir le fait d'introduire de la généricité dans le problème et d'utiliser des arguments (comme le théorème de Baire) afin de réduire le problème de départ au cas générique.

La généricité se traduit ici par le fait que les $\alpha_j > 0$ sont $\mathbf{Q}$-algébriquement indépendants et le principal argument lié à cette généricité vient du fait que
$\mathbf{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_r] \simeq \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_r]$ (voir le lemme 22).

Chapitre 2

Preuve du théorème principal

On généralise dans ce chapitre le théorème d'Estermann aux produits eulériens $Z(\mathbf{s}) = h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n})$ déterminés par un polynôme $h(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ vérifiant une hypothèse de régularité analytique lorsque $n \geq 2$ et $h(\mathbf{0}) = 1$. On cherche donc à caractériser précisément la frontière naturelle de $Z(\mathbf{s})$, c'est à dire la frontière du domaine maximal sur lequel il existe un prolongement méromorphe de $Z(\mathbf{s})$.

2.1 Notations.

Etant donné deux entiers positifs r et n on définit :

$$h\left(X_1, \ldots, X_n\right) = 1 + a_1 X_1^{\alpha_1^1} X_2^{\alpha_1^2} \cdots X_n^{\alpha_1^n} + ... + a_r X_1^{\alpha_r^1} X_2^{\alpha_r^2} \cdots X_n^{\alpha_r^n};$$

$$Z\left(\mathbf{s}\right) = \prod_p h\left(p^{-s_1}, p^{-s_2}, \ldots, p^{-s_n}\right) \text{ pour } \mathbf{s} = \left(s_1, \ldots, s_n\right) \in \mathbf{C}^n,$$

où a_j pour $j = 1, \ldots, r$ sont des entiers et α_j^ℓ pour $j = 1, 2, \ldots, r$ et $l = 1, \ldots, n$ sont des entiers positifs.

On fixe également les notations suivantes pour toute la suite.

On écrira :

pour tout $\mathbf{m} \in \mathbf{N}^r$:

$$\|\mathbf{m}\| = \sum_{j=1}^{r} m_j;$$

pour $\mathbf{s} \in \mathbf{C}^n, \mathbf{s} = \left(s_1, \ldots, s_n\right), \forall l \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\sigma_\ell = \Re\left(s_\ell\right); \ \gamma_\ell = \Im\left(s_\ell\right); \ \sigma = \Re\left(\mathbf{s}\right) = \left(\sigma_1, \ldots, \sigma_n\right); \ \gamma = \Im\left(\mathbf{s}\right) = \left(\gamma_1, \ldots, \gamma_n\right);$$

on définit également pour $\ell = 1, \ldots, n$ and $j = 1, \ldots, r$:

$$\alpha^\ell = (\alpha_1^\ell, \ldots, \alpha_r^\ell) \qquad \alpha_j = (\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^n).$$

Pour $j \in \{1, \ldots, r\}$ on posera :

$$\mathbf{X}^{\alpha_j} = X_1^{\alpha_j^1} X_2^{\alpha_j^2} \cdots X_n^{\alpha_j^n}.$$

Etant donné $\mathbf{m} \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ et $l \in \{1, \ldots, n\}$, on définit :

$$\langle \mathbf{m}, \alpha^\ell \rangle = \sum_{j=1}^{r} m_\ell \alpha_j^\ell$$

(respectivement pour $\mathbf{s} = (s_1, ...s_n)$ et $j \in \{1, \ldots, r\}$, $\langle \mathbf{s}, \alpha_j \rangle = \sum_{l=1}^{n} s_\ell \alpha_j^\ell$).

2.2 Présentation des résultats de ce chapitre.

Débutons par une définition basique.

Définition 6. On dira que $h(X_1, \ldots, X_n)$ est cyclotomique s'il existe un sous-ensemble fini I de $\mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que :

$$h(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in I} \left(1 - X_1^{\lambda_1} \cdots X_n^{\lambda_n}\right)^{\gamma(\lambda)},$$

où $\gamma(\lambda) \in \mathbf{Z}$ pour chaque $\lambda \in I$.

Remarque 2. Si $h(X_1, \ldots, X_n)$ est cyclotomique, alors si $\sigma_\ell > 1$ pour tout $l \in \{1, \ldots, n\}$, on a :

$$Z(\mathbf{s}) = \prod_{\lambda \in I} \zeta(\langle \lambda, \mathbf{s} \rangle)^{-\gamma(\lambda)},$$

où $\zeta(z)$ désigne la fonction zêta de Riemann. Par conséquent, il est clair que $Z(\mathbf{s})$ se prolonge de façon méromorphe à tout $\mathbf{C}^n$.

D'autre part, si deux polynômes $h(X_1, \ldots, X_n)$ et $g(X_1, \ldots, X_n)$ sont tels que :

$$g(X_1, \ldots, X_n) = h(X_1, \ldots, X_n) \prod_{\lambda \in I} \left(1 - \mathbf{X}^\lambda\right)^{\gamma(\lambda)}$$

avec $I \subseteq \mathbf{N}^n$ fini et $\gamma(\lambda) \in \mathbf{Z}, \forall \lambda \in I$, alors les domaines maximaux des produits eulériens $\prod_p h(p^{-s_1}, p^{-s_2}, \ldots, p^{-s_n})$ et $\prod_p g(p^{-s_1}, p^{-s_2}, \ldots, p^{-s_n})$ sont les mêmes.

On supposera donc à partir de maintenant que h n'est pas cyclotomique. De plus, on supposera sans perte de généralité que h ne contient pas de facteur cyclotomique.

Définition 7. Supposons que h n'est pas cyclotomique et ne contient pas de facteur cyclotomique.

Pour tout $\delta \geq 0$ on pose :

$$W(\delta) = \{\mathbf{s} \in \mathbf{C}^n : \langle \sigma, \alpha_j \rangle > \delta, \forall j \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

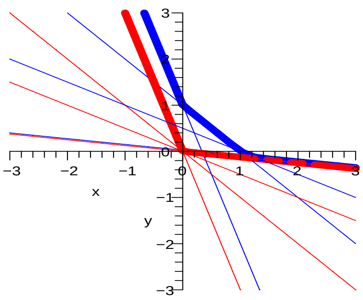

FIG. 2.1 – Un exemple de représentation de $W(1)$ et $W(0)$ pour $n = 2$ (projection dans l'espace des parties réelles).

Avant d'énoncer le résultat, nous allons d'abord introduire une définition.

Comme $W(0) = \{\mathbf{s} \in \mathbf{C}^n : \Re(\langle \mathbf{s}, \alpha_j \rangle) \geq 0, \forall j = 1, \ldots, r\}$, alors $\partial W(0)$ est un polyèdre dont les faces sont de la forme :

$$\mathcal{F}(\alpha_e) = \{\mathbf{s} \in \overline{W(0)} : \Re(\langle s, \alpha_e \rangle) = 0\};$$

pour un vecteur $\alpha_e \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$.

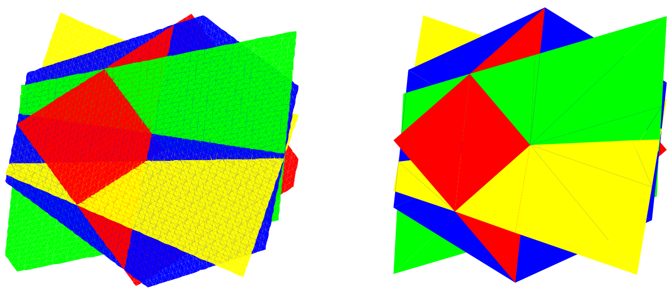

FIG. 2.2 – Un exemple de représentation de $W(1)$ et $W(0)$ pour $n = 3$ (projection dans l'espace des parties réelles).

On dira par abus de langage que $\mathcal{F}(\alpha_e)$ est une face de vecteur polaire α_e.

Soit maintenant $\mathcal{F}(\alpha_e)$ une face de $\partial W(0)$ comme ci-dessus et considérons en particulier $\widehat{\alpha}_e \in \mathbf{N}^n, \widehat{\alpha}_e \in \mathbf{Q}\alpha_e$ le vecteur colinéaire à α_e dont les composantes non nulles sont premières entre elles.

On pose également :

$$\Lambda_e := \{j \in \{1, \ldots, r\} : \alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e\}.$$

Il est clair que pour tout $j \in \Lambda_e$ il existe $q_j \in \mathbf{N}^*$ tel que $\alpha_j = q_j\widehat{\alpha}_e$.

On définit alors :

$$\begin{aligned} [h]_e(\mathbf{X}) &:= 1 + \sum_{\alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_j \mathbf{X}^{\alpha_j} \\ \widetilde{[h]}_e(T) &:= 1 + \sum_{\alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_j T^{q_j} \in \mathbf{Z}[T] \text{ vérifiant } \widetilde{[h]}_e(\mathbf{X}^{\widehat{\alpha}_e}) = [h]_e(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Définition 8. On dira que la face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ est une face non dégénérée si le polynôme d'une variable $\widetilde{[h]}_e(T)$ n'a pas de racine multiple.

Le cas d'une variable fut traité par Estermann (voir [12]) dans un article de 1928. Il prouva le théorème suivant :

Théorème 5 (Estermann)**.** *Soit* $h(X) = 1 + \sum_{m=1}^r b_m X^m = \prod_{m=1}^r (1 - \alpha_m X) \in \mathbf{Z}[X]$. *Soit* $f(s) = \prod_p h(p^{-s})$, *qui converge pour* $\Re(s) > 1$. *Alors :*

(i) $f(s)$ *se prolonge de façon méromorphe à* $\Re(s) > 0$.

(ii) Si $|\alpha_m| = 1\ \forall m = 1, .., r$, *alors* $f(s)$ *se prolonge à tout* $\mathbf{C}$. *Sinon,* $\Re(s) = 0$ *est une frontière naturelle pour* f *(i.e. pour chaque point* $s = it$ *de l'axe imaginaire,* f *ne peut s'étendre de façon méromorphe à tout voisinage* $\mathcal{B}(it)$*).*

Remarque 3. Notons que l'hypothèse (ii) équivaut au fait que $h(X)$ est cyclotomique dans le sens de la définition 6.

Pour un polynôme h de $n > 1$ variables, on observe premièrement que $Z(\mathbf{s})$ définit une fonction holomorphe en $\mathbf{s}$ dans le domaine $\langle \sigma, \alpha_j \rangle > 1, (j = 1, \ldots, r)$. Dans [2], rappelons que G. Bhowmik, D. Essouabri and B. Lichtin ont montré qu'il existe un prolongement méromorphe de $Z(\mathbf{s})$ à $W(0)$. Ils démontrèrent en effet le résultat suivant.

Théorème 6 (Bhowmik-Essouabri-Lichtin)**.** *Pour chaque* $\delta > 0$, *il existe un produit eulérien borné* $G_\delta(\boldsymbol{s})$, *absolument convergent dans* $W(\delta)$ *tel que :*

$$Z(\boldsymbol{s}) = \prod_{\substack{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r) \in \mathbf{N}^r \\ 1 \le \|\beta\| \le [\delta^{-1}]}} \zeta\left(\sum_{l=1}^n \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell\right)^{\gamma(\beta)} G_\delta(\beta); \tag{2.1}$$

où $\{\gamma(\beta) : \beta \in \mathbf{N}^r\} \subset \mathbf{Z}$.

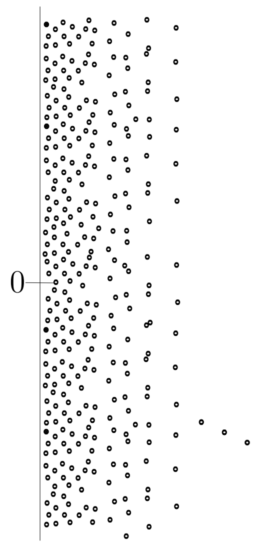

FIG. 2.3 – Frontière naturelle de $\prod_p h\left(p^{-s}\right)$ (pour h non cyclotomique) et accumulation de zéros ou pôles au voisinage à droite de chacun de ses points.

En fait, leur résultat est plus fort. Ils montrèrent également que $Z(\mathbf{s})$ n'admet pas de prolongement méromorphe jusqu'à $W(\delta)$ pour tout $\delta < 0$. Et ceci provient du fait que le point $t = 0$ est un point d'accumulation de zéros ou de pôles de la fonction d'une variable complexe $t \longmapsto Z(t\theta)$ pour presque toutes les directions θ.

L'objectif de ce travail est de vérifier que $\partial W(0)$ est une frontière naturelle pour $Z(\mathbf{s})$, c'est à dire que $\partial W(0)$ est l'exact analogue multivariable de l'axe imaginaire frontière naturelle qui apparaît dans le théorème d'Estermann.

On peut remarquer dans un premier temps que la géométrie de ces $W(\delta)$ ($\delta \geq 0$) est plus compliquée que dans le cas d'une variable ; on peut en particulier noter que la forme de $W(\delta)$ change lorsque δ varie.

De plus, les exposants α_j de h n'ont pas tous la même importance dans le calcul des $W(\delta)$. Considérons en effet l'exemple suivant.

Exemple 1. Soit

$$h(X_1, X_2, X_3) = 1 + \sum \left(1 - X_i^3\right) X_j^2 X_k - X_1^3 X_2^3 X_3^3;$$

la somme portant sur les 6 permutations de $1, 2, 3$.

Alors on peut vérifier sans difficulté que les $W(\delta)$ de h sont complètement déterminés à partir de :

$$[h](X_1, X_2, X_3) = 1 + X_1 X_2^2 + X_1^2 X_2 + X_1 X_3^2 + X_1^2 X_3 + X_2 X_3^2 + X_2^2 X_3;$$

et les autres monômes de h n'interviennent jamais dans le calcul des $W(\delta)$.

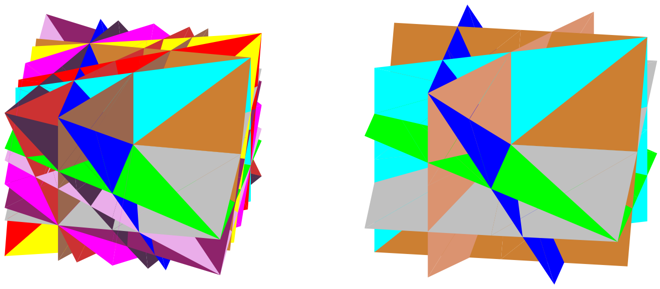

Fig. 2.4 – Représentation de $W(\delta)$ ($\forall \delta \geq 0$) calculé à partir de $h(X_1, X_2, X_3)$ et de $[h](X_1, X_2, X_3)$ de l'exemple 1 (projection dans l'espace des parties réelles).

Le résultat principal que l'on démontrera s'énonce de la façon suivante.

Théorème principal.

On suppose que h n'est pas cyclotomique et admet au moins une face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ de $\partial W(0)$ non dégénérée au sens de la définition 8.

Soit $\mathcal{B}$ une boule ouverte centrée en un point quelconque $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e)$. Alors $Z(\mathbf{s})$ n'admet pas de prolongement méromorphe à tout domaine contenant $\mathcal{B}$.

La preuve de ce résultat (voir le théorème 6 in §2.4) reprend en les adaptant des arguments utilisés dans [12], [8], [2] et [11] et y ajoutent deux nouvelles idées. La première (voir §2.3.2) consiste à écrire $h(X_1, \ldots, X_n)$ sous la forme d'un produit infini de polynômes cyclotomiques. Cela permet de manipuler le produit eulérien $\prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n})$ au-delà de $W(1)$ avec une certaine facilité. En particulier cela fournit une autre preuve du fait que $Z(\mathbf{s})$ se prolonge de façon méromorphe à $W(0)$.

La seconde nouveauté consiste à analyser avec une bonne précision comment "s'accumulent" les zéros de $Z(\mathbf{s})$ (i.e. contrôler l'éventuelle compensation entre les zéros et les pôles de $Z(\mathbf{s})$) à l'intérieur de toute boule ouverte centrée en un point de $\partial W(0)$. En particulier, on est capable d'assurer la non compensation de ces pôles et de ces zéros (et donc d'assurer l'accumulation des zéros de $Z(\mathbf{s})$) en considérant les zéros se trouvant dans une direction appropriée (déterminée par un vecteur réel de $\mathbf{R}^n$). De tels zéros doivent être des zéros de facteurs de $Z(\mathbf{s})$, ces facteurs provenant de l'expression de $Z(\mathbf{s})$ démontrée dans §2.2. Notons que parmi ces facteurs apparaissent des facteurs zêta ; on pourrait donc penser qu'il est nécessaire de connaître des informations précises concernant la localisation des zéros de $\zeta(s)$. Cependant, l'un des points importants de ce travail est d'introduire une certaine dynamique dans le problème qui permet de réduire l'étude à un ensemble de "bons" points génériques de $\partial W(0)$; et ce de façon à ne pas avoir besoin d'ajouter des hypothèses sur les zéros de la fonction zêta de Riemann.

On verra en particulier le rôle très important que joue la partie $[h]_e$ du polynôme h pour $e \in \{1, \ldots, r\}$ dans l'accumulation de zéros ou de pôles au voisinage de la frontière.

En effet, cette partie $[h]_e$ s'obtenant à partir de h en ne conservant que les termes dont les puissances sont parallèles à α_e, on montre qu'au voisinage de l'hyperplan de la frontière $\partial W(0)$ perpendiculaire à α_e le produit eulérien associé à h est approximé par celui associé à $[h]_e$. Et par conséquent, si ce $[h]_e$ n'est pas cyclotomique, on obtiendra une caractérisation précise de l'accumulation des zéros ou des pôles de $Z(\mathbf{s})$ au voisinage de l'hyperplan perpendiculaire à α_e en fonction des zéros du polynôme $[h]_e$.

2.3 Réécriture de $Z(\mathbf{s})$ sous la forme d'un produit de fonctions zêta et prolongement méromorphe.

2.3.1 Une formule d'inversion pour une fonction arithmétique de plusieurs variables.

Le résultat suivant, qui généralise la formule d'inversion pour une fonction arithmétique d'une variable, sera utilisé pour démontrer une identité dans §2.3.2.

Définition 9. Si

$$g : \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbf{C},$$

$$f : \mathbf{N}^*(= \mathbf{N} - \{0\}) \longrightarrow \mathbf{C};$$

on définit $f\tilde{*}g : \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbf{C}$ en posant :

$$\forall \beta \in \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \ f\tilde{*}g\,(\beta) = \sum_{\substack{\mathbf{b} \in \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \\ m \in \mathbf{N}^*, \\ m\mathbf{b} = \beta}} f\,(m)\, g\,(\mathbf{b})\,.$$

Lemme 1. *Si*

$$g : \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbf{C},$$

$$f_1, f_2 : \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{C},$$

alors :

$$f_1\tilde{*}\,(f_2\tilde{*}g) = (f_1 * f_2)\,\tilde{*}g,$$

où $*$ désigne le produit de convolution standard des fonctions arithmétiques d'une variable.

Preuve. On a $\forall \beta \in \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\begin{aligned}
f_1\tilde{*}\left(f_2\tilde{*}g\right)(\beta) &= \sum_{\substack{\mathbf{b}\in\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\},\\ m\in\mathbf{N}^*,\\ m\mathbf{b}=\beta}} f_1(m)\left(f_2\tilde{*}g\right)(\mathbf{b})\\
&= \sum_{\substack{\mathbf{b}\in\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\},\\ m\in\mathbf{N}^*,\\ m\mathbf{b}=\beta}} f_1(m)\sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\},\\ d\in\mathbf{N}^*,\\ d\mathbf{e}=\mathbf{b}}} f_2(d)\, g(\mathbf{e})\\
&= \sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\},\\ (m,d)\in(\mathbf{N}^*)^2,\\ md\mathbf{e}=\beta}} f_1(m)\, f_2(d)\, g(\mathbf{e})\\
&= \sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\},\\ k\in\mathbf{N}^*,\\ k\mathbf{e}=\beta}} \left(\sum_{md=k} f_1(m)\, f_2(d)\right) g(\mathbf{e})\\
&= \sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\},\\ k\in\mathbf{N}^*,\\ k\mathbf{e}=\beta}} \left(f_1 * f_2\right)(k)\, g(\mathbf{e})\\
&= \left(f_1 * f_2\right)\tilde{*}g(\beta).
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. □

Par conséquent, si f est une fonction arithmétique d'une variable inversible (selon le produit de convolution standard), et si on connaît $f\tilde{*}g$, on peut retrouver la fonction g :

Corollaire 2.3.1. Soit $f : \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction arithmétique inversible d'inverse f^{-1}. Alors, pour tout $g : \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbf{C}$ on a :

$$g(\beta) = f^{-1}\tilde{*}\left(f\tilde{*}g\right)(\beta) \qquad \forall\beta \in \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

2.3.2 Prolongement méromorphe de $Z(\mathbf{s})$.

Dans cette partie on donne une autre preuve (différente de celle de [2]) du fait que $Z(\mathbf{s})$ se prolonge de façon méromorphe à $W(0)$. L'argument se base essentiellement sur une expression des polynômes h de la forme de §2.1 sous la forme d'un produit infini de polynômes cyclotomiques.

Considérons la quantité suivante :

$$C := C(h) = \frac{1}{|a_1| + \cdots + |a_r|} \in]0, 1].$$

Il est clair que si chaque $|Y_i| < C$ $(i = 1, \ldots, r)$ alors :

$$\left|\sum_{i=1}^{r} a_i Y_i\right| < 1; \tag{2.2}$$

et on vérifie que $C = C(h)$ est maximal parmi les C vérifiant (2.2).

Lemme 2. *Si chaque* $|Y_i| < C = C(h) = \frac{1}{|a_1|+\cdots+|a_r|}$, *alors*

$$1 + a_1Y_1 + \cdots + a_rY_r = \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathit{0}\}} \left(1 - Y_1^{\beta_1}...Y_r^{\beta_r}\right)^{\gamma(\beta)}, \tag{2.3}$$

où le membre de droite converge absolument et chaque

$$\gamma(\beta) = \sum_{\substack{\boldsymbol{b}\in\mathbf{N}^r\setminus\{\boldsymbol{0}\}\\ m\in\mathbf{N}\\ m\boldsymbol{b}=\beta}} \left((-1)^{\|\boldsymbol{b}\|}\frac{\mu(m)}{m}\frac{(\|\boldsymbol{b}\|-1)!}{b_1!...b_r!}a_1^{b_1}...a_r^{b_r}\right)\in\mathbf{Z}$$

($\mu(.)$ désigne la fonction de Möbius).

De plus,

$$|\gamma(\beta)| \ll C^{-\|\beta\|}$$

uniformément en $\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\boldsymbol{0}\}$.

Remarque 4. Le fait que $\gamma(\beta)\in\mathbf{Z}$ se démontre par récurrence sur $\|\beta\|$ de la même façon que dans [12] p. 448 dans le supplément de l'appendice ajouté le 14 Janvier 1928.

En effet, si tout d'abord $||\beta||=1$, on considère les $\beta(\ell)\in\mathbf{N}^r\setminus\{0,\dots,0\}$ pour $\ell\in\{1,\dots,r\}$ tels que $\beta(\ell)_i=0$ pour $i\neq\ell$ et $\beta(\ell)_\ell=1$.

Et on vérifie que l'on a

$$\gamma(\beta(\ell)) = -a_\ell\in\mathbf{Z}. \tag{2.4}$$

Pour le voir, il suffit de partir de l'identité :

$$\begin{aligned} 1+a_1Y_1+\cdots+a_rY_r &= \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{0,\dots,0\}}\left(1-\mathbf{Y}^\beta\right)^{\gamma(\beta)} \\ &= \prod_{\ell\in\{1,\dots,r\}}\left(1-\mathbf{Y}^{\beta(\ell)}\right)^{\gamma(\beta(\ell))}\prod_{||\beta||\geq 2}\left(1-\mathbf{Y}^\beta\right)^{\gamma(\beta)} \end{aligned}$$

D'où :

$$(1+a_1Y_1+\cdots+a_rY_r)\prod_{\ell\in\{1,\dots,r\}}(1-Y_\ell)^{-\gamma(\beta(\ell))} = \prod_{||\beta||\geq 2}\left(1-\mathbf{Y}^\beta\right)^{\gamma(\beta)}. \tag{2.5}$$

Ensuite on développe le membre de gauche de (2.5). On obtient :

$$\left(1+\sum_{\ell=1}^r a_\ell Y_\ell\right)\left(1+\sum_{\ell=1}^r\gamma(\beta(\ell))Y_\ell+\sum_{||\mathbf{b}||\geq 2}a_{\mathbf{b}}\mathbf{Y}^{\mathbf{b}}\right). \tag{2.6}$$

Si donc on a l'égalité (2.5), les termes en Y_ℓ dans (2.6) doivent se simplifier ; ce qui donne bien (2.4).

Supposons maintenant que $\gamma(\beta)\in\mathbf{Z}$ pour tout $\|\beta\|\leq N$ $(N\geq 1)$, et montrons que $\gamma(\beta)\in\mathbf{Z}$ pour tout $\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}$ tel que $\|\beta\|=N+1$.

On utilise là encore le même argument. On écrit :

$$(1 + a_1 Y_1 + \cdots + a_r Y_r) \prod_{||\beta|| \leq N} \left(1 - \mathbf{Y}^{\beta}\right)^{-\gamma(\beta)} = \prod_{||\beta|| \geq N+1} \left(1 - \mathbf{Y}^{\beta}\right)^{\gamma(\beta)}. \tag{2.7}$$

Le membre de droite de (2.7) s'écrit :

$$\prod_{||\beta|| \geq N+1} \left(1 - \mathbf{Y}^{\beta}\right)^{\gamma(\beta)} = 1 - \sum_{||\beta|| = N+1} \gamma(\beta) \mathbf{Y}^{\beta} + \sum_{||\beta|| > N+1} a_{\beta} \mathbf{Y}^{\beta}.$$

D'autre part, par hypothèse de récurrence, on sait que le membre de gauche de (2.7) est une série entière à coefficients entiers.

Par identification dans (2.7), on a bien que $\gamma(\beta) \in \mathbf{Z}$ pour tout β tel que $||\beta|| = N + 1$; et donc que $\gamma(\beta) \in \mathbf{Z}$ pour tout $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Preuve (lemme 2). On pose

$$\gamma(\beta) = \sum_{\substack{\mathbf{b} \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\} \\ m \in \mathbf{N} \\ m\mathbf{b} = \beta}} \left((-1)^{\|\mathbf{b}\|} \frac{\mu(m)}{m} \frac{(\|\mathbf{b}\| - 1)!}{b_1! \ldots b_r!} a_1^{b_1} \ldots a_r^{b_r} \right).$$

Donnons une estimation de $\gamma(\beta)$. On a :

$$\begin{aligned}
|\gamma(\beta)| &\leq \sum_{\substack{\mathbf{b} \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\} \\ m \in \mathbf{N} \\ m\mathbf{b} = \beta}} \frac{1}{m} \frac{(\|\mathbf{b}\| - 1)!}{b_1! \cdots, b_r!} \prod_{j=1}^{r} |a_j|^{b_j} \\
&\leq \frac{1}{\|\beta\|} \sum_{\substack{\mathbf{b} \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\} \\ m \in \mathbf{N} \\ m\mathbf{b} = \beta}} \frac{\|\mathbf{b}\|!}{b_1! \cdots, b_r!} \prod_{j=1}^{r} |a_j|^{b_j} \\
&\leq \frac{1}{\|\beta\|} \sum_{m | \|\beta\|} \sum_{\substack{\mathbf{b} \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\} \\ \|\mathbf{b}\| = \frac{\|\beta\|}{m}}} \frac{\|\mathbf{b}\|!}{b_1! \cdots, b_r!} \prod_{j=1}^{r} |a_j|^{b_j} \\
&\leq \frac{1}{\|\beta\|} \sum_{m | \|\beta\|} (|a_1| + \cdots + |a_r|)^{\frac{\|\beta\|}{m}} \\
&\leq \frac{\tau(\|\beta\|)}{\|\beta\|} (|a_1| + \cdots + |a_r|)^{\|\beta\|} \quad \text{où } \tau(\|\beta\|) \text{ est le nombre de diviseur de } \|\beta\| \\
&\leq \frac{\tau(\|\beta\|)}{\|\beta\|} C^{-\|\beta\|} \\
&\ll C^{-\|\beta\|}
\end{aligned}$$

uniformément en $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Posons maintenant

$$G(\mathbf{Y}) := \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} \left(1 - Y_1^{\beta_1}\cdots Y_r^{\beta_r}\right)^{\gamma(\beta)}.$$

Vérifions que $G(\mathbf{Y})$ est une fonction holomorphe dans $\{\mathbf{Y}\in\mathbf{C}^r : \max_i|Y_i| < C\}$. Soit donc $0 < C_1 < C$ et montrons la convergence de G pour $\max_i|Y_i| < C_1$. On a pour $|Y_i| < C_1$:

$$\begin{aligned}\sum_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} |\gamma(\beta)||Y^\beta| &\leq \sum_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} C^{-\|\beta\|}C_1^{\|\beta\|}\\ &= \sum_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} \left(\frac{C_1}{C}\right)^{\|\beta\|}\\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{C_1}{C}\right)^k\right)^r = \frac{1}{\left(1-\frac{C_1}{C}\right)^r} < +\infty.\end{aligned}$$

Donc $\mathbf{Y}\longmapsto G(\mathbf{Y})$ converge absolument et définit une fonction holomorphe dans $\mathcal{D} := \{\mathbf{Y}\in\mathbf{C}^r : \max_i|Y_i| < C\}$; de plus, pour tout $Y\in\mathbf{D}$ on a :

$$\begin{aligned}\log(G(Y)) &= \sum_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} \gamma(\beta)\log(1-\mathbf{Y}^\beta)\\ &= -\sum_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} \gamma(\beta)\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m}\mathbf{Y}^{m\beta}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Et puisque (2.8) converge absolument pour $\mathbf{Y}\in\mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned}\log(G(\mathbf{Y})) &= -\sum_{\mathbf{b}\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\left(\sum_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\},m\in\mathbf{N},m\beta=\mathbf{b}}\frac{\gamma(\beta)}{m}\right)\mathbf{Y}^{\mathbf{b}}\\ &= -\sum_{\mathbf{b}\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\frac{1}{\|\mathbf{b}\|}\left(\sum_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\},m\in\mathbf{N},m\beta=\mathbf{b}}\|\beta\|\gamma(\beta)\right)\mathbf{Y}^{\mathbf{b}}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Or on a d'une part :

$$-\|\beta\|\gamma(\beta) = \sum_{m\in\mathbf{N},\mathbf{b}\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\},m\mathbf{b}=\beta} \mu(m)(-1)^{\|\mathbf{b}\|-1}\frac{\|\mathbf{b}\|!}{b_1!\cdots b_r!}a_1^{b_1}\cdots a_r^{b_r};$$

Et par définition de §2.3.1, on a :

$$-\|\beta\|\gamma(\beta) = \mu\tilde{*}g(\beta),$$

où μ désigne la fonction de Möbius, et la fonction g est définie par $g(\beta) = (-1)^{\|\beta\|-1}\frac{\|\beta\|!}{\beta_1!\cdots\beta_r!}a_1^{\beta_1}\cdots a_r^{\beta_r}$ pour $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Puisque la fonction $\mathbf{1}$ valant 1 partout est l'inverse de la fonction μ on obtient :

$$\sum_{\exists m\in\mathbf{N},\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\},m\beta=\mathbf{b}} -\|\beta\|\gamma(\beta) = (-1)^{\|\mathbf{b}\|-1}\frac{\|\mathbf{b}\|!}{b_1!\cdots b_r!}a_1^{b_1}\cdots a_r^{b_r}. \tag{2.10}$$

L'identité (2.9) fournit donc :

$$\begin{aligned}\log(G(\mathbf{Y})) &= \sum_{\mathbf{b}\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\frac{1}{\|\mathbf{b}\|}(-1)^{\|\mathbf{b}\|}\frac{\|\mathbf{b}\|!}{b_1!\cdots b_r!}\mathbf{a}^{\mathbf{b}}\mathbf{Y}^{\mathbf{b}}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left(\sum_{\|\mathbf{b}\|=k}\frac{k!}{b_1!\cdots b_r!}\prod_{j=1}^{r}(a_jY_j)^{b_j}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}(a_1Y_1+\cdots+a_rY_r)^k\\ &= \log(1+a_1Y_1+\cdots+a_rY_r);\end{aligned}$$

d'où l'égalité recherchée. □

On fixe un polynôme h comme dans §2.1 et on considère la quantité :

$$C := C(h) = \frac{1}{|a_1|+\cdots+|a_r|}. \tag{2.11}$$

Corollaire 2.3.2. Si chaque $|\mathbf{X}^{\alpha_j}| < C$ pour $j \in \{1,\ldots,r\}$, alors :

$$\begin{aligned}1+a_1\mathbf{X}^{\alpha_1}+\cdots+a_r\mathbf{X}^{\alpha_r} &= \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\left(1-\prod_{l=1}^{n}X_\ell^{\langle\beta,\alpha^\ell\rangle}\right)^{\gamma(\beta)}\\ &= \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\left(1-\mathbf{X}^{\left(\sum_{j=1}^r\beta_j\alpha_j\right)}\right)^{\gamma(\beta)}.\end{aligned}$$

Théorème 7. *$Z(\boldsymbol{s})$ est méromorphe dans $W(0)$.*

De plus, si on écrit pour tout $\delta > 0$ $M_\delta = \left[C^{-\frac{1}{\delta}}\right]+1$ ($M_\delta \in \mathbf{N}$), il existe A_{M_δ} méromorphe sur $W(\delta)$ avec des éventuels zéros ou pôles dans l'ensemble :

$$\Phi_\delta = \left\{\boldsymbol{s}\in W(\delta) \mid \exists\beta\in\mathbf{N}^r, \sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell = \rho,\ \rho \text{ zéro ou pôle de } \zeta(s)\right\}.$$

tel que la relation suivante a lieu dans $W(\delta)$:

$$Z(\boldsymbol{s}) = \prod_{p \leq M_\delta} h\left(p^{-s_1}, \dots, p^{-s_n}\right) A_{M_\delta}(\boldsymbol{s}).$$

Preuve. On montre que $Z(\mathbf{s})$ est méromorphe dans $W(\delta)$ pour tout $\delta > 0$.

On sait que si chaque $|\mathbf{X}^{\alpha_j}| < C$ alors

$$h(X_1, \dots, X_n) = \prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \left(1 - \mathbf{X}^{\left(\sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j\right)}\right)^{\gamma(\beta)}$$

où le membre de droite converge absolument.

On sait d'après le lemme précédent que

$$|\gamma(\beta)| = O\left(C^{-\|\beta\|}\right).$$

Pour $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $\mathbf{s} \in W(\delta)$ on a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{p > M_\delta} \left|\gamma(\beta) p^{-\sum_{l=1}^n \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell}\right| &\leq |\gamma(\beta)| \sum_{p > M_\delta} p^{-\sum_{l=1}^n \langle \beta, \alpha^\ell \rangle \sigma_\ell} \\
&= |\gamma(\beta)| \sum_{p > M_\delta} p^{-\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \alpha_j, \sigma \rangle} \\
&\leq |\gamma(\beta)| \int_{M_\delta}^{+\infty} x^{-\|\beta\|\delta} dx \\
&= O\left(|\gamma(\beta)| M_\delta^{-\|\beta\|\delta + 1}\right) \\
&= O\left(C^{-\|\beta\|} M_\delta^{-\|\beta\|\delta + 1}\right).
\end{aligned}$$

Puisque $|x| < 1$ implique :

$$\sum_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} x^{\|\beta\|} = \left(\frac{1}{1 - x}\right)^r - 1 < +\infty,$$

et puisque $M_\delta > C^{-\frac{1}{\delta}}$, on observe que ϵ peut être supposé assez petit de sorte que $M_\delta > (C - 2\epsilon)^{-\frac{1}{\delta}}$. On a alors :

$$\sum_{p > M_\delta} \sum_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \left|\frac{\gamma(\beta)}{p^{\sum_{l=1}^n \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell}}\right| < +\infty;$$

et ainsi d'après le théorème de Fubini appliqué avec la mesure de comptage on obtient :

$$\prod_{p > M_\delta} \prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \left(1 - p^{-\left(\sum_{l=1}^n \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell\right)}\right)^{\gamma(\beta)} = \prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \prod_{p > M_\delta} \left(1 - p^{-\left(\sum_{l=1}^n \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell\right)}\right)^{\gamma(\beta)}.$$

Il vient alors, initialement pour $\sigma_k > -\frac{\log(C)}{\log(2)}, (k = 1, \ldots, n)$ (i.e. $|p^{-s_k}| < C$ pour chaque k), et ensuite par prolongement analytique sur tout $W(\delta)$, l'égalité suivante :

$$\prod_{p>M_\delta} h\left(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}\right) = \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} \left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)\right]^{-\gamma(\beta)},$$

où

$$\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right) = \zeta\left(\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)\prod_{p\le M_\delta}\left(1 - p^{-\left(\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)}\right). \tag{2.12}$$

On note maintenant que pour tout z vérifiant $\Re(z) > 0$, $\zeta(z)$ et $\zeta_{M_\delta}(z)$ ont exactement les mêmes zéros avec les mêmes multiplicités puisque $\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\sigma_\ell = \sum_j \beta_j\langle\alpha_j,\sigma\rangle > \delta$ lorsque $\mathbf{s} \in W(\delta)$ et $\left(1 - p^{-\Re(z)}\right)$ ne s'annule pas lorsque $p \le M_\delta$ et $\Re(z) > \delta$.

Soit :

$$A_{M_\delta}(\mathbf{s}) = \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} \left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)\right]^{-\gamma(\beta)}.$$

les zéros ou les pôles de A_{M_δ} sont nécessairement dans Φ_δ. De plus, A_{M_δ} est méromorphe dans $W(\delta)$.

En effet écrivons :

$$A_{M_\delta}(\mathbf{s}) = A_{1,M_\delta}(\mathbf{s})\, A_{2,M_\delta}(\mathbf{s}),$$

avec

$$A_{1,M_\delta}(\mathbf{s}) = \prod_{\|\beta\|\le[\delta^{-1}]} \left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)\right]^{-\gamma(\beta)}$$

et

$$A_{2,M_\delta}(\mathbf{s}) = \prod_{\|\beta\|>[\delta^{-1}]} \left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)\right]^{-\gamma(\beta)}.$$

A_{1,M_δ} est clairement méromorphe dans $\mathbf{C}^n$ puisqu'il s'agit d'un produit fini de fonctions méromorphes.

En ce qui concerne A_{2,M_δ}, on a pour $\|\beta\| \ge [\delta^{-1}] + 1$,

$$\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\sigma_\ell \ge \|\beta\|\delta > 1;$$

Donc

$$\left|\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right) - 1\right| \le \sum_{k=M_\delta+1}^{+\infty} k^{-\|\beta\|\delta} < \int_{M_\delta}^{+\infty} x^{-\|\beta\|\delta}dx = \frac{1}{\|\beta\|\delta - 1}\frac{1}{M_\delta^{\|\beta\|\delta-1}}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{\|\beta\|\geq[\delta^{-1}]+1} |\gamma(\beta)| \left|\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)-1\right|$$
$$\leq \sum_{\|\beta\|\geq[\delta^{-1}]+1} \left(\frac{C^{-1}}{(M_\delta)^\delta}\right)^{\|\beta\|} \frac{M_\delta}{\|\beta\|\delta-1} < +\infty;$$

ce qui prouve la méromorphie de A_{2,M_δ}, et donc celle de A_{M_δ} dans $W(\delta)$.

Finalement, puisque

$$Z(\mathbf{s}) = A_{M_\delta}(\mathbf{s}) \prod_{p\leq M_\delta} h\left(p^{-s_1},\ldots,p^{-s_n}\right);$$

il s'ensuit que $Z(\mathbf{s})$ est méromorphe dans $W(\delta)$.

Ce qui termine la preuve. □

2.4 Frontière naturelle de $Z(\mathrm{s})$.

On a précédemment montré que $Z(\mathbf{s})$ pouvait se prolonger de façon méromorphe jusqu'à $W(0)$. Cette section a pour but de vérifier que $\partial W(0)$ est une frontière naturelle de $Z(\mathbf{s})$ lorsque h n'est pas cyclotomique.

La nouveauté récurrente de ce travail s'appuie sur le fait que s'il existe un prolongement méromorphe au-delà d'un point de $\partial W(0)$, alors ce prolongement se fait dans une boule débordant de $\partial W(0)$; par conséquent il suffit de considérer un point $\mathbf{s}^0$ générique se trouvant sur $\partial W(0)$ (un ensemble générique signifie ici que son complémentaire est d'intérieur vide) et de montrer l'existence d'une accumulation de zéros ou de pôles dans une certaine direction $\theta \in \mathbf{Q}^n$ convenable.

En fait, l'argument de généricité au niveau du point $\mathbf{s}^0 \in \partial W(0)$ intervient à plusieurs reprises au cours de la preuve du théorème principal 8 qui suit (voir la condition (2.13), la preuve du lemme 5 et la preuve du lemme 7 entre autres).

Dans toute la suite on suppose que h **n'est pas cyclotomique et ne contient pas de facteur cyclotomique**.

Cette section a pour objectif de montrer le résultat suivant :

Théorème 8. *Si $\mathcal{F}(\alpha_e) \subseteq \partial W(0)$ est une face non dégénérée au sens de la définition 8 alors $Z(\boldsymbol{s})$ n'admet pas de prolongement méromorphe à toute boule ouverte $\mathcal{B}$ centrée en un point quelconque $\boldsymbol{s}^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e) \subseteq \partial W(0)$.*

Soit donc $s^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e)$ vérifiant $\langle\sigma^0,\alpha_e\rangle = 0$.

Considérons une boule $\mathcal{B}(\mathbf{s}^0) = \mathcal{B}$ de rayon arbitrairement petit autour du point $\mathbf{s}^0$.

Quitte à perturber $\mathbf{s}^0 \in \partial W(0) \cap \mathcal{B}$, on peut supposer que σ^0 vérifie la condition de généricité suivante étant donné un vecteur $\mathbf{w} \in \mathbf{Q}^n$:

$$\langle \sigma^0, \mathbf{w} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{w} \in \mathbf{Q}\alpha_e. \tag{2.13}$$

En particulier on a :

Si $\beta, \beta' \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ sont tels que $\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle = \sum_{j=1}^r \beta'_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle$, alors $\sum_{j=1}^r \beta'_j \alpha_j \in \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j + \mathbf{Q}\alpha_e$.

Définition 10. Etant donné $e \in \{1, \ldots, r\}$ on note $\langle \alpha_e \rangle = \mathbf{Q}\alpha_e$ la droite passant par $\mathbf{0}$ et α_e, et on définit la e-ième partie $[h]_e \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ de h comme étant :

$$[h]_e(\mathbf{X}) = 1 + \sum_{\alpha_j \in \langle \alpha_e \rangle} a_j \mathbf{X}^{\alpha_j}.$$

Définition 11. Etant donné $e \in \{1, \ldots, r\}$ on pose

$$\begin{aligned} \Lambda_e \quad &= \left\{ j \in \{1, \ldots, r\} : \alpha_j \in \langle \alpha_e \rangle \right\} \\ B_e \quad &= \left\{ \beta \in \mathbf{N}^r : \beta_j = 0 \quad \text{si} \quad j \notin \Lambda_e \right\}. \end{aligned}$$

Rappelons que d'après §2.3.2, on a étant donné $\delta > 0$ l'expression suivante de $Z(\mathbf{s})$ pour $\mathbf{s} \in W(\delta)$:

$$Z(\mathbf{s}) = \prod_{p \leq M_\delta} h\left(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}\right) A_{M_\delta}(\mathbf{s}) \ \ (\mathbf{s} \in W(\delta));$$

où $M_\delta = \left[C^{-\frac{1}{\delta}}\right] + 1$ et $C := C(h) = \frac{1}{|a_1| + \cdots + |a_r|}$.

On considère alors $Z|_{L(\mathbf{s}^0, \theta)}$ la restriction de Z à une droite complexe $L = L(\mathbf{s}^0, \theta)$ de direction $\theta \in \mathbf{Q}^n_{>0}$ passant par $\mathbf{s}^0$ que l'on paramétrise de la façon suivante :

$$t \longmapsto Z(\mathbf{s}^0 + t\theta).$$

L'objectif est de montrer qu'il existe une accumulation de zéros de $Z|_L$ dans tout rectangle $\Xi_{u,\eta}$ dépendant de deux paramètres $(u, \eta > 0)$ suivant :

$$\Xi_{u,\eta} : \quad \begin{aligned} &0 < \Re(t) < 1 \\ &0 < u < \Im(t) < u + \eta. \end{aligned}$$

Pour pouvoir utiliser l'écriture du théorème 7 pour $Z|_{L(s^0, \theta)}$, il suffit d'imposer la condition suivante sur $\theta \in \mathbf{Q}^n$:

$$\langle \theta, \alpha_j \rangle \geq 1 \text{ for all } j \in \{1, \ldots, r\}. \tag{2.14}$$

Il est alors facile de vérifier que lorsque θ satisfait la condition (2.14) et si $\Re(t) \geq \delta > 0$ alors $\mathbf{s}^0 + t\theta \in W(\delta)$. En effet, on observe que :

$\forall j \in \{1, \ldots, r\}$, $\langle \sigma^0 + \Re(t)\,\theta, \alpha_j \rangle \geq \Re(t) \geq \delta$.

Par conséquent, on peut appliquer le théorème 7 pour avoir une expression sous la forme d'un produit infini pour $Z(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ si $\Re(t) \geq \delta$ pour tout $\delta > 0$.

La démonstration du théorème 8 se fera en deux étapes.

Dans un premier temps, on va montrer une accumulation de zéros provenant des facteurs $t \longmapsto \prod_{p \leq M_\delta} h\left(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}\right)$.

Le point délicat consistera à montrer l'existence de tels zéros de partie réelle strictement positive, c'est à dire à droite de $\partial W(0)$. C'est en contrôlant la dépendance en θ de ces zéros (en les exprimant par des séries de Puiseux) et en choisissant ce θ judicieusement que l'on pourra assurer cette propriété.

Dans un second temps, il faudra s'assurer que ces zéros ne sont pas compensés par d'éventuels pôles provenant des zêta-facteurs constituant $A_{M_\delta}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$. Pour cela il faut tout d'abord remarquer que les zéros ou pôles de $A_{M_\delta}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ concernés sont de la forme :

$$t(\beta, \rho) = \frac{\rho - \sum_{j=1}^r \beta_j \langle \mathbf{s}^0, \alpha_j \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle}; \tag{2.15}$$

où $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ et ρ désigne le pôle 1 ou un zéro non trivial de la fonction zêta de Riemann.

L'idée consistera ensuite à tirer profit cette fois-ci de la liberté que l'on a dans le choix de $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{B} \cap \partial W(0)$ de façon à avoir pour tout ρ et pour tout $\beta \notin B_e$:

$$h\left(p^{-s_1^0 - t(\beta,\rho)\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t(\beta,\rho)\theta_n}\right) \neq 0.$$

Et on vérifiera également que les possibles zéros $t(\beta, \rho)$ avec $\beta \in B_e$ qui peuvent annuler $t \longmapsto h\left(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}\right)$ sont beaucoup moins nombreux que les $t_{m,p}$ dans le rectangle $\Xi_{u,\eta}$.

Enonçons dès maintenant un lemme que nous utiliserons à plusieurs reprises qui affirme que les zéros d'une fonction holomorphe non identiquement nulle sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$ forment localement une réunion finie d'hypersurfaces de dimension au plus $n-1$ et sont donc d'intérieur vide dans $\mathbf{C}^n$.

On remarquera au passage que ce lemme est une conséquence du théorème de préparation de Weierstrass que l'on peut trouver dans [1].

Lemme 3. *Soit*

$$f : \begin{array}{ccc} U \subseteq \mathbf{C}^n & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

une fonction holomorphe et non identiquement nulle sur U.

L'ensemble $f^{-1}(0)$ est localement une réunion finie d'hypersurfaces de dimension au plus $n-1$; en particulier $f^{-1}(0)$ est d'intérieur vide dans $\mathbf{C}^n$.

Preuve. Plaçons-nous dans un voisinage d'un zéro $(z_1, \ldots, z_n) \in U$ de $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Dans un tel voisinage, f peut s'écrire, en tant que fonction analytique, sous la forme d'une série entière :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{w \in \mathbf{N}^n} c_w (x_1 - z_1)^{w_1} \cdots (x_n - z_n)^{w_n}.$$

Si l'une des conditions pour $\ell \in \{1, \ldots, n\}$:

$$x_\ell \longmapsto f(z_1, \ldots, z_{\ell-1}, x_\ell, z_{\ell+1}, \ldots, z_n) \not\equiv 0, \tag{2.16}$$

est satisfaite, on peut alors appliquer le théorème de préparation de Weierstrass qui fournit dans un voisinage de $(z_1, \ldots, z_n)$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = E(x_1, \ldots, x_n) P(x_1, \ldots, x_n);$$

où

$$\begin{aligned} P(x_1, \ldots, x_n) \;&=\; x_\ell^d + x_\ell^{d-1} h_{d-1}(x_1, \ldots, x_{\ell-1}, \widehat{x_\ell}, x_{\ell+1}, \ldots, x_n) + \cdots + \\ &\quad\; x_\ell h_1(x_1, \ldots, x_{\ell-1}, \widehat{x_\ell}, x_{\ell+1}, \ldots, x_n) + h_0(x_1, \ldots, x_{\ell-1}, \widehat{x_\ell}, x_{\ell+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

est un polynôme en x_ℓ dont les coefficients $h_k(x_1, \ldots, x_{\ell-1}, \widehat{x_\ell}, x_{\ell+1}, \ldots, x_n)$ sont analytiques en $x_1, \ldots, x_{\ell-1}, x_{\ell+1}, \ldots, x_n$ et où E ne s'annule pas.

On voit donc que les zéros de $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ sont donnés par une réunion finie d'au plus d hypersurfaces de dimension au plus $n-1$; ils sont par conséquent d'intérieur vide dans $\mathbf{C}^n$.

Si maintenant aucune des conditions (2.16) n'est satisfaite, étant donné $\mu \in (\mathbf{R}^*)^n$ il suffit d'établir le changement de variables :

$$\begin{cases} x_1 - z_1 = \mu_1 u_1, \\ x_2 - z_2 = \mu_2 u_1 + u_2, \\ x_3 - z_3 = \mu_3 u_1 + u_3, \\ \cdots \\ x_n - z_n = \mu_n u_1 + u_n; \end{cases}$$

de façon à avoir :

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ &= \sum_{w \in \mathbf{N}^n} c_w (\mu_1 u_1)^{w_1} (\mu_2 u_1 + u_2)^{w_2} \cdots (\mu_n u_1 + u_n)^{w_n}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f(1,0,\ldots,0) = \sum_{w\in\mathbf{N}^n} c_w \mu_1^{w_1}\mu_2^{w_2}\cdots\mu_n^{w_n}.$$

Il y a donc au moins un $\mu \in (\mathbf{R}^*)^n$ tel que le changement de variable plus haut donne $f(u_1,0,\ldots,0) \not\equiv 0$. Et par conséquent l'une des conditions (2.16) est bien satisfaite, ce qui termine la preuve de ce lemme.

□

Débutons par décrire les zéros de $t \longmapsto h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n}\right)$ et on cherche à utiliser pour cela la théorie des séries de Puiseux.

Définition des polynômes généralisés. On aura besoin dans la suite d'élargir dans un certain sens la classe classique des polynômes de deux variables.

Définition 12. On dira que $W(X,Y)$ est un polynôme généralisé si pour tout $X \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-$ et $Y \in \mathbf{C}$ privé d'une demi-droite on a :

$$W(X,Y) = 1 + \sum_{j=1}^{r} c_j X^{\nu_j} Y^{\mu_j} \ (c_j \in \mathbf{C});$$

où pour tout $j \in \{1,\ldots,r\}$, $\nu_j \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ et $\mu_j \in \mathbf{Q}_{>0}$.

Remarquons qu'à la différence des polynômes classiques, les polynômes généralisés $W(X,Y)$ ne sont a priori définis que pour $X, Y \in \mathbf{C}$ privé d'une demi-droite puisqu'il est nécessaire ici de pouvoir définir un logarithme pour les définir.

Ainsi lorsque l'on parlera d'un polynôme généralisé $W(X,Y)$, il sera sous-entendu dans toute la suite qu'on le considère pour $X \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-$ et pour $Y \in \mathbf{C}$ privé d'une demi-droite pour disposer d'une détermination du logarithme.

De même que pour les polynômes, en utilisant exactement le même raisonnement que celui exposé dans le lemme 2, on dispose de l'expansion cyclotomique suivante pour un polynôme généralisé $W(X,Y) = 1 + \sum_{j=1}^r c_j X^{\nu_j} Y^{\mu_j}$:

Proposition 1. *Soit* $C_W := min\left(1, (\sum_{j=1}^r |c_j|)^{-1}\right)$.

Si chaque $|X^{\nu_j}Y^{\mu_j}| < C_W$ $(X \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-, Y \in \mathbf{C}\setminus e^{i\mathbf{b}}\mathbf{R}_+)$ *pour* $j \in \{1,\ldots,r\}$, *alors :*

$$1 + c_1X^{\nu_1}Y^{\mu_1} + \cdots + c_rX^{\nu_r}Y^{\mu_r} \quad = \quad \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\boldsymbol{0}\}} \left(1 - X^{\langle\beta,\nu\rangle}Y^{\langle\beta,\mu\rangle}\right)^{\gamma(\beta)};$$

où

$$\gamma(\beta) = \sum_{\substack{\boldsymbol{b}\in\mathbf{N}^r\setminus\{\boldsymbol{0}\}\\ m\in\mathbf{N}\\ m\boldsymbol{b}=\beta}} \left((-1)^{\|\boldsymbol{b}\|}\frac{\mu(m)}{m}\frac{(\|\boldsymbol{b}\|-1)!}{b_1!\ldots b_r!}c_1^{b_1}\ldots c_r^{b_r}\right) \in \mathbf{C}.$$

Soit p un nombre premier.

On considère en particulier le polynôme généralisé :

$$W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y) = 1 + a_1 p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_1\rangle} X^{\langle\sigma^0,\alpha_1\rangle} Y^{\langle\theta,\alpha_1\rangle} + \cdots + a_r p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_r\rangle} X^{\langle\sigma^0,\alpha_r\rangle} Y^{\langle\theta,\alpha_r\rangle}.$$

Puisque $\mathbf{s}^0 = \sigma^0 + i\gamma^0$, il s'ensuit que :

$$W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(p^{-1}, p^{-t}\right) = h\left(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}\right).$$

Notons également que pour p fixé, $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(p^{-1}, p^{-t}\right)$ est bien défini pour presque tout $t \in \Xi_{u,\eta}$ (i.e. pour tout $t \in \Xi_{u,\eta}$ sauf au plus un nombre fini).

En effet, $p^{-1} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ et si on a choisit la branche $e^{i\mathfrak{b}}\mathbf{R}_+$ et la détermination du logarithme correspondante afin de définir $W_{s^0,\theta}(X,Y)$ sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- \times \mathbf{C} \setminus e^{i\mathfrak{b}}\mathbf{R}_+$, on a alors $p^{-t} \in e^{i\mathfrak{b}}\mathbf{R}_+$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\Im(t) = \frac{2k\pi - \mathfrak{b}}{\log(p)}; \tag{2.17}$$

il y a donc au plus un nombre fini de tels $t \in \Xi_{u,\eta}$ vérifiant (2.17) ; ce qui justifie le fait que $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(p^{-1}, p^{-t}\right)$ est bien défini pour presque tout $t \in \Xi_{u,\eta}$.

Remarque 5. $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ n'est pas un polynôme à coefficients entiers.

Cependant, d'après la proposition 1, on peut néanmoins écrire $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ sous la forme d'un produit

$$\prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \left(1 - X^{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle\sigma^0,\alpha_j\rangle} Y^{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle\theta,\alpha_j\rangle}\right)^{\gamma_{p,\gamma^0}(\beta)}; \tag{2.18}$$

sauf que cette fois-ci les puissances $\gamma_{p,\gamma^0}(\beta)$ sont a priori complexes et les $1 - X^{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle\sigma^0,\alpha_j\rangle} Y^{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle\theta,\alpha_j\rangle}$ ne sont pas des vrais monômes (c'est à dire avec des puissances entières).

On dira par abus de langage que (2.18) est l'expansion cyclotomique de $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ et que $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ est cyclotomique si son expansion cyclotomique est un produit fini.

Lemme 4. *Il existe un ensemble générique*

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E} := \left\{\gamma^0 \in \mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{s}^0 = \sigma^0 + i\gamma^0 \in \mathcal{B} \cap \partial W(0)\right\}$$

(i.e. $\mathcal{E} \setminus \mathcal{G}$ est un ensemble d'intérieur vide)
tel que pour tout $\gamma^0 \in \mathcal{G}$, $W^p_{s^0,\theta}(X,Y)$ n'est pas cyclotomique.

De plus s'il existe, pour un nombre premier p fixé, $\mathfrak{c} \in \mathbf{C}^*$ telle que pour tout $X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ on a :

$$W_{\boldsymbol{s}^0,\theta}(X,\mathfrak{c}) := W^p_{\boldsymbol{s}^0,\theta}\,|_{\gamma^0=\boldsymbol{o}}(X,\mathfrak{c}) = 0$$

(en choisissant bien entendu une branche $e^{i\mathfrak{b}}\mathbf{R}_+$ et une détermination du logarithme correspondante de façon à ce que $W^p_{s^0,\theta}\,|_{\gamma^0=\boldsymbol{o}}(X,\mathfrak{c})$ soit bien défini pour $X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ et $\mathfrak{c} \in \mathbf{C} \setminus e^{i\mathfrak{b}}\mathbf{R}_+$) ;

alors nécessairement $|\mathfrak{c}| \neq 1$ et h est un polynôme réductible ou se ramène à un polynôme d'une variable dans $\mathbf{Q}[T]$ après le changement de variable $T := \boldsymbol{X}^{\alpha_e}$.

Preuve. Utilisons l'écriture du corollaire 2.3.2 pour $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}$. On a :

$$1+\sum_{j=1}^{r} a_j p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle} X^{\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle} Y^{\langle\theta,\alpha_j\rangle} = \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} \left(1 - X^{\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle} Y^{\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}\right)^{\gamma_{p,\gamma^0}(\beta)} ; \tag{2.19}$$

où

$$\gamma_{p,\gamma^0}(\beta) = \sum_{\substack{\mathbf{b}\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}\\ m\in\mathbf{N}\\ m\mathbf{b}=\beta}} \left((-1)^{\|\mathbf{b}\|}\frac{\mu(m)}{m}\frac{(\|\mathbf{b}\|-1)!}{b_1!\ldots b_r!}\left(a_1 p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_1\rangle}\right)^{b_1}\ldots\left(a_r p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_r\rangle}\right)^{b_r}\right). \tag{2.20}$$

On veut montrer que cette expansion cyclotomique est infinie (i.e. ne se réduit pas à un produit fini) pour γ^0 générique.

Il faut tenir compte des éventuels regroupements qui peuvent s'effectuer entre certains termes. Pour cela on considère la relation d'équivalence $\sim_W$ suivante sur les $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\beta \sim_W \beta' \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^r \beta_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle = \sum_{j=1}^r \beta'_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle \\ \sum_{j=1}^r \beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle = \sum_{j=1}^r \beta'_j\langle\theta,\alpha_j\rangle. \end{cases} \tag{2.21}$$

On note d'autre part $[\beta]$ la classe d'équivalence de $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $\mathcal{J}$ un ensemble de représentants de chacune des classes modulo la relation $\sim_W$. On pose également :

$$\gamma_{p,\gamma^0}([\beta]) = \sum_{\beta'\sim_W\beta} \gamma_{p,\gamma^0}(\beta').$$

Notons que cette somme est une somme finie : en effet $\beta \sim_W \beta'$ implique :

$$\|\beta'\| \leq \frac{\sum_{j=1}^r \beta'_j \langle \theta, \alpha_j \rangle}{\min_j \langle \theta, \alpha_j \rangle} = \frac{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle}{\min_j \langle \theta, \alpha_j \rangle} \leq \frac{\max_j \langle \theta, \alpha_j \rangle}{\min_j \langle \theta, \alpha_j \rangle} \|\beta\|.$$

L'égalité (2.19) se réécrit donc sous la forme suivante :

$$1 + \sum_{j=1}^r a_j p^{-i\langle \gamma^0, \alpha_j \rangle} X^{\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle} Y^{\langle \theta, \alpha_j \rangle} = \prod_{[\beta] \in \mathcal{J}} \left(1 - X^{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle} Y^{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle}\right)^{\gamma_{p,\gamma^0}([\beta])}; \tag{2.22}$$

avec cette fois-ci des monômes deux à deux distincts.

On veut donc vérifier que ce produit (2.22) est infini pour $\gamma^0 \in \mathbf{R}^n$ dans un ensemble générique ; c'est à dire qu'il existe une infinité de $\gamma_{p,\gamma^0}([\beta]) \neq 0$ pour $\gamma^0 \in \mathbf{R}^n$ générique.

Considérons dans un premier temps le cas où $\gamma^0 = \mathbf{0}$.

Tout d'abord, on remarque d'après l'identité (2.20) que pour tout $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\gamma_{p,\gamma^0}(\beta) \mid_{\gamma^0 = \mathbf{0}} = \gamma(\beta); \tag{2.23}$$

les $\gamma(\beta)$ étant ceux intervenant dans la décomposition cyclotomique de h.

Montrons que $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X, Y) \mid_{\gamma^0 = \mathbf{0}}$ n'est pas cyclotomique.

On sait que

$$h(\mathbf{X}) = \prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \left(1 - \mathbf{X}^{\sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j}\right)^{\gamma(\beta)} \tag{2.24}$$

n'est pas cyclotomique et que par conséquent sa décomposition cyclotomique ne peut pas se réduire à un produit fini.

Réécrivons de même que précédemment ce produit après regroupements des termes.

Il faut là encore définir une relation d'équivalence $\sim_h$ sur les $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ qui tient compte des regroupements possibles dans l'écriture (2.24) :

$$\beta \sim_h \beta' \iff \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j = \sum_{j=1}^r \beta'_j \alpha_j.$$

Montrons que les relations $\sim_h$ et $\sim_W$ sont exactement les mêmes.

Tout d'abord, il est clair que $\beta \sim_h \beta'$ implique $\beta \sim_W \beta'$.

Réciproquement, si $\beta \sim_W \beta'$, on a alors :

1. $\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle = \sum_{j=1}^r \beta'_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle$,
2. $\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle = \sum_{j=1}^r \beta'_j \langle \theta, \alpha_j \rangle$;

alors la première égalité donne d'après la condition (2.13) de généricité sur σ^0 l'existence de $q \in \mathbf{Q}$ tel que :

$$\sum_{j=1}^{r} \beta'_j \alpha_j = \sum_{j=1}^{r} \beta_j \alpha_j + q\alpha_e.$$

La seconde égalité permet alors d'affirmer que :

$$q\langle \theta, \alpha_e \rangle = 0;$$

et donc $q = 0$ puisque $\langle \theta, \alpha_e \rangle \neq 0$; ce qui donne $\beta \sim_h \beta'$.

Ainsi, on peut définir :

$$\gamma([\beta]) = \sum_{\beta' \sim_h \beta} \gamma(\beta');$$

de sorte que :

$$h(\mathbf{X}) = \prod_{[\beta] \in \mathcal{J}} \left(1 - \mathbf{X}^{\sum_{j=1}^{r} \beta_j \alpha_j}\right)^{\gamma([\beta])}$$

soit un produit dont les monômes sont deux à deux distincts.

Notons que ce produit est infini (i.e. il y a une infinité de $\gamma([\beta]) \neq 0$) puisque h n'est pas cyclotomique par hypothèse.

De plus on a pour tout $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\begin{aligned} \gamma\left([\beta]\right) &= \sum_{\beta' \sim_h \beta} \gamma(\beta') \\ &= \sum_{\beta' \sim_W \beta} \gamma_{p,\gamma^0}(\beta') \mid_{\gamma^0 = \mathbf{0}} \quad \text{d'après (2.23)} \\ &= \gamma_{p,\gamma^0}\left([\beta]\right) \mid_{\gamma^0 = \mathbf{0}} . \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe un sous-ensemble infini I de $\mathbf{N}^r$ indépendant de p tel que pour tout $\beta \in I$ et pour tout nombre premier p, la fonction $f_{\beta,p}$:

$$f_{\beta,p} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \gamma^0 & \longmapsto & f_{\beta,p}\left(\gamma^0\right) := \gamma_{p,\gamma^0}([\beta]) \end{array}$$

n'est pas identiquement nulle (il suffit de poser $\beta \in I$ si et seulement si $\gamma\left([\beta]\right) \mid_{\gamma^0 = \mathbf{0}} = \gamma\left([\beta]\right) \neq 0$).

D'autre part, ces fonctions $f_{\beta,p}$ (p premier, $\beta \in I$) sont holomorphes en γ^0 dans $\mathbf{C}^n$ puisque les $\gamma_{p,\gamma^0}([\beta])$ sont des sommes finies de $\gamma_{p,\gamma^0}(\beta')$ qui sont holomorphes sur $\mathbf{C}^n$ comme le montre l'expression (2.20).

Il suffit alors d'utiliser le lemme 3 pour en déduire que pour tout nombre premier p et tout $\beta \in I$ l'ensemble

$$f_{\beta,p}^{-1}(0)$$

est une hypersurface complexe de $\mathbf{C}^n$ de dimension au plus $n-1$ d'intérieur vide dans $\mathbf{C}^n$ et même dans $\mathbf{R}^n$[1].

Par conséquent, la réunion dénombrable

$$M := \bigcup_{\beta \in I, p \text{ premier}} f_{\beta,p}^{-1}(0)$$

est également d'intérieur vide dans $\mathbf{R}^n$ d'après le théorème de Baire.

Finalement, si $\gamma^0 \notin M$, l'expansion (2.22) admet une infinité d'exposants non nuls, ce qui montre la première assertion du lemme.

Supposons maintenant qu'il existe $\mathfrak{c} \in \mathbf{C}^*$ tel que pour tout $X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$:

$$W_{s^0,\theta}(X,\mathfrak{c}) := W_{s^0,\theta}^p \,|_{\gamma^0=\mathbf{0}}\, (X,\mathfrak{c}) = 0.$$

Pour tout $X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ on a :

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p \,|_{\gamma^0=\mathbf{0}}\, (X,\mathfrak{c}) &= 1 + \sum_{j=1}^{r} a_j X^{\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle} \mathfrak{c}^{\langle \theta, \alpha_j \rangle} \\ &= h\left(X^{\sigma_1^0}\mathfrak{c}^{\theta_1}, \ldots, X^{\sigma_n^0}\mathfrak{c}^{\theta_n}\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

De plus, le choix générique de σ^0 s'exprime par le fait que la seule contrainte que doivent vérifier ses composantes est $\langle \sigma^0, \alpha_e \rangle = 0$.

Par conséquent, si l'on suppose sans perte de généralité que $\alpha_e^n \neq 0$, on peut ramener $\sigma^0 \in \mathbf{R}^n$ (tel que $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{B} \cap \partial W(0)$) à un $(n-1)$-uplet $\widetilde{\sigma}^0 = (\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0) \in U \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$ (U ouvert de $\mathbf{R}^{n-1}$) en posant :

$$\begin{cases} \sigma_\ell^0 = \widetilde{\sigma}_\ell^0 & (\ell \in \{1, \ldots, n-1\}), \\ \sigma_n^0 = -\dfrac{1}{\alpha_e^n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_e^i \widetilde{\sigma}_i^0 & . \end{cases}$$

Définissons alors pour tout $x \in \mathbf{R}_{>0}$:

$$\Phi_x : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbf{R}^{n-1} \\ \widetilde{\sigma}^0 = (\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0) & \longmapsto & \left(x^{\widetilde{\sigma}_1^0}, \ldots, x^{\widetilde{\sigma}_{n-1}^0}\right). \end{array}$$

[1]On utilise ici le fait que toute fonction holomorphe sur un ouvert $O \subseteq \mathbf{C}^n$ nulle sur $O \cap \mathbf{R}^n$ est nécessairement nulle sur O.

Il est clair que $\bigcup_{x>0} \Phi_x(U)$ contient un ouvert non vide U' de $(0,\infty)^{n-1}$.

Par conséquent, pour tout $(t_1,\ldots,t_{n-1}) \in U'$ il existe $x>0$ et $\widetilde{\sigma}^0 = (\widetilde{\sigma}_1^0,\ldots,\widetilde{\sigma}_{n-1}^0) \in U$ tel que $(t_1,\ldots,t_{n-1}) = \left(x^{\widetilde{\sigma}_1^0},\ldots,x^{\widetilde{\sigma}_{n-1}^0}\right)$ et on a :

$$\begin{aligned} h\left(t_1\mathfrak{c}^{\theta_1},\ldots,t_{n-1}\mathfrak{c}^{\theta_{n-1}},\mathfrak{c}^{\theta_n}\prod_{\ell=1}^{n-1} t_\ell^{-\frac{\alpha_e^\ell}{\alpha_e^n}}\right) &= h\left(x^{\sigma_1^0}\mathfrak{c}^{\theta_1},\ldots,x^{\sigma_n^0}\mathfrak{c}^{\theta_n}\right) \\ &= 0 \text{ d'après (2.25).} \end{aligned}$$

D'autre part, il existe un ouvert non vide U'' de $(0,\infty)^{n-1}$ tel que pour tout $(y_1,\ldots,y_{n-1}) \in U''$ il existe $(t_1,\ldots,t_{n-1}) \in U'$ vérifiant pour tout $i \in \{1\ldots,n-1\}$:

$$y_i^{\alpha_e^n} = t_i.$$

Or la fonction

$$(y_1,\ldots,y_{n-1}) \longmapsto h\left(y_1^{\alpha_e^n}\mathfrak{c}^{\theta_1},\ldots,y_{n-1}^{\alpha_e^n}\mathfrak{c}^{\theta_{n-1}},\mathfrak{c}^{\theta_n}\prod_{\ell=1}^{n-1} y_\ell^{-\alpha_e^\ell}\right)$$

est holomorphe sur tout $(\mathbf{C}^*)^{n-1}$.

Et puisqu'elle s'annule sur un ouvert non vide U'' de $(0,\infty)^{n-1}$, on a en réalité

$$\forall (y_1,\ldots,y_{n-1}) \in (\mathbf{C}^*)^{n-1},\ h\left(y_1^{\alpha_e^n}\mathfrak{c}^{\theta_1},\ldots,y_{n-1}^{\alpha_e^n}\mathfrak{c}^{\theta_{n-1}},\mathfrak{c}^{\theta_n}\prod_{\ell=1}^{n-1} t_\ell^{-\alpha_e^\ell}\right) = 0.$$

Par suite le polynôme $h(X_1,\ldots,X_n)$ s'annule sur $\mathcal{H}\cap(\mathbf{C}^*)^{n-1}$ où $\mathcal{H}$ est l'hypersurface complexe définie par l'équation

$$\mathfrak{c}^{-\langle\theta,\alpha_e\rangle}\mathbf{X}^{\alpha_e} - 1 = \prod_{\ell=1}^{n} X_\ell^{\alpha_e^\ell}\mathfrak{c}^{-\theta_\ell\alpha_e^\ell} - 1 = 0.$$

On en déduit que le polynôme $X_1\cdots X_{n-1}h(X_1,\ldots,X_n)$ s'annule sur toute l'hypersurface $\mathcal{H}$ et donc que le polynôme $\mathfrak{c}^{-\langle\theta,\alpha_e\rangle}\mathbf{X}^{\alpha_e} - 1$ divise une puissance du polynôme $X_1\ldots X_{n-1}\,h(X_1,\ldots,X_n)$. Comme les polynômes $\mathfrak{c}^{-\langle\theta,\alpha_e\rangle}\mathbf{X}^{\alpha_e} - 1$ et $X_1\ldots X_{n-1}$ sont premiers entre eux, on en déduit que le polynôme

$$P_{\mathfrak{c}}(\mathbf{X}) := \mathfrak{c}^{-\langle\theta,\alpha_e\rangle}\mathbf{X}^{\alpha_e} - 1 \tag{2.26}$$

divise nécessairement une puissance de h ; et donc $P_{\mathfrak{c}}(\mathbf{X})$ divise aussi h puisque tous les facteurs irréductibles de $P_{\mathfrak{c}}(\mathbf{X})$ sont de multiplicité 1.

Et puisque h est à coefficients rationnels et que $\mathfrak{c}$ est algébrique, le polynôme

$$Q(\mathbf{X}) := \prod_{\mathfrak{c}'} P_{\mathfrak{c}'}(\mathbf{X}) \in \mathbf{Q}[\mathbf{X}]$$

(où le produit est pris sur tous les conjugués $\mathfrak{c}'$ de $\mathfrak{c}$) divise également h.

Remarquons que $Q(\mathbf{X})$ se ramène en fait à un polynôme d'une variable quitte à faire un changement de variable ($T := \mathbf{X}^{\alpha_e}$). h est donc nécessairement un polynôme réductible ou alors il s'agit d'un polynôme qui se ramène à un polynôme d'une variable[2] dans $\mathbf{Q}[T]$ après le changement de variable $T := \mathbf{X}^{\alpha_e}$.

De plus, si donc par l'absurde on suppose que $|\mathfrak{c}| = 1$, on pourrait appliquer le critère ii) de cyclotomie du résultat d'Estermann au polynôme d'une variable $Q(\mathbf{X})$ pour en déduire que ce polynôme est cyclotomique ; ce qui n'est pas possible puisque h ne contient aucun facteur cyclotomique par hypothèse.

□

L'idée est maintenant de reprendre l'un des outils qui a été développé par M. du Sautoy lorsqu'il a étudié des produits eulériens associés à un polynôme de deux variables ([10]). Il utilise en particulier la théorie des séries de Puiseux, une généralisation du théorème des fonctions implicites.

Cependant, la théorie de Puiseux classique n'est pas adaptée pour la classe des polynômes généralisés puisque l'algorithme de Puiseux classique appliqué à un polynôme généralisé ne fournit a priori pas nécessairement une solution convergente ni même une solution formelle. De plus, l'utilisation de la théorie de Puiseux multivariable ne fournit pas de résultats satisfaisants à cause d'un très mauvais contrôle du domaine de convergence des solutions.

C'est la raison pour laquelle on a recourt à l'hypothèse de la définition 8 qui permet de se ramener à appliquer le théorème des fonctions implicites en regardant ces polynômes généralisés comme des polynômes de plusieurs variables dont on a spécialisé les variables ; de cette façon on justifie l'existence et la convergence, pour $X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, $|X|$ au voisinage de 0, des solutions.

D'autre part, il est possible de définir le polygone de Newton d'un polynôme généralisé de même que dans [29],p. 98.

On dispose donc d'une méthode basée sur le polygone de Newton de $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ pour calculer les solutions dont on a montré l'existence d'après le théorème des fonctions implicites.

Définition 13. Soit
$$f(X,Y) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{r'} a_{\mu_i,\nu_j} X^{\mu_i} Y^{\nu_j},$$
où pour tout $i \in \{1,\ldots,r\}$ $\mu_i \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ et $\mu_i = 0$ pour au moins un i et pour tout $j \in \{1,\ldots,r'\}$ $\nu_j \in \mathbf{Q}_{>0}$.

[2]En fait dans tout ce texte, on peut supposer sans perte de généralité que cette situation ne se produit pas, car si $h(\mathbf{X})$ se ramène à un polynôme d'une variable en $T = \mathbf{X}^{\alpha_e}$ il suffirait d'appliquer le théorème d'Estermann pour les polynômes d'une variable pour déterminer la frontière naturelle de $Z(\mathbf{s})$.

On appelle $\mathcal{S}(f) = \left\{(\mu_i, \nu_j), a_{\mu_i,\nu_j} \neq 0\right\}$ le support de f et on note $P_{i,j}$ le point de coordonées (μ_i, ν_j). L'enveloppe convexe inférieure de $\mathcal{S}(f)$ est un polygone convexe qui définit le polygone de Newton $N(f)$ de f. $N(f)$ est donc composé d'un nombre fini de segments dont les extrémités sont parmi les points $P_{i,j}$, et tout autre élément de $\mathcal{S}(f)$ se trouve sur ou au-dessus de la réunion de ces segments.

Le principe consiste à exprimer, pour X dans un voisinage de 0, Y en fonction de X tel que $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y) = 0$.

Cependant, $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ n'est pas un vrai polynôme ; il faut donc justifier pourquoi il est possible de généraliser la théorie de Puiseux (que l'on pourra trouver par exemple dans [7]) pour les polynômes de deux variables à cette classe de polynômes généralisés. La principale difficulté ici vient du fait que les exposants des monômes de $W_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ ne sont pas des entiers ; $W_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ est donc défini à partir d'une détermination du logarithme et n'est donc pas une fonction régulière en $X = 0$.

Théorème de Puiseux pour $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$:

Définition 14. On pose $\widehat{\alpha}_e \in \mathbf{N}^*$ le vecteur colinéaire à α_e dont les composantes non nulles sont premières entre elles. De cette façon, si $j \in \Lambda_e$, il existe $q_j \in \mathbf{N}^*$ tel que $\alpha_j = q_j\widehat{\alpha}_e$.

On pose alors :

$$\widetilde{[h]_e}(T) := 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j T^{q_j}.$$

Puisque $\mathcal{F}(\alpha_e)$ est supposé être une face non dégénérée, le polynôme $\widetilde{[h]_e}(T)$ n'a pas de racine double.

Pour la suite on supposera que $\langle\theta, \widehat{\alpha}_e\rangle$ est un entier positif (on précisera même ultérieurement (voir (2.35)) que l'on choisit θ de façon à ce que $\langle\theta, \widehat{\alpha}_e\rangle$ soit un entier positif pair).

Proposition 2. *(***Théorème de Puiseux pour $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$***).*
On fixe p, θ et $\boldsymbol{s}^0$.
Soit $q \in \mathbf{N}^*$ le plus petit entier positif vérifiant $q\langle\alpha_j, \theta\rangle \in \mathbf{N}^*$ pour tout $j = 1, \ldots, r$.
On considère l'ensemble fini

$$\mathfrak{p} := \left\{\ c_p \in \mathbf{C};\ \exists c \text{ racine de } \widetilde{[h]_e}(T) \text{ tel que } c_p^{q\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle} = p^{i\langle\gamma^0,\widehat{\alpha}_e\rangle} c\right\}.$$

Il existe $\epsilon_1 > 0$ (indépendant de p) tel que pour tout $X \in \mathcal{H} := \{X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-, |X| < \epsilon_1\}$ l'équation $W^p_{\boldsymbol{s}^0,\theta}(X,Y) = 0$ a pour ensemble de solutions

$$Y = Y_{c_p}(X)\ (c_p \in \mathfrak{p});$$

où pour tout $c_p \in \mathfrak{p}$ $X \longmapsto Y_{c_p}(X)$ est une fonction holomorphe sur $\mathcal{H}$ et vérifie pour tout $X \in \mathcal{H}$:

$$Y_{c_p}(X) = \sum_{k=0}^{\kappa_{c_p}} \mathfrak{c}_k(c_p, p) X^{\vartheta_k},$$

avec

1. $\kappa_{c_p} \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ *;*
2. $\vartheta_0 = 0 < \vartheta_1 < \cdots$ *est une suite strictement croissante ;*
3. $\lim_{k\to+\infty} \vartheta_k = +\infty$ *si* $\kappa_{c_p} = +\infty$ *;*
4. *il existe deux constantes* $D_{\epsilon_0} > 1$ *et* $A(\sigma^0) > 0$ *(indépendantes de p et de k) telles que*
$$|\mathfrak{c}_k(c_p, p)| \ll D_{\epsilon_0}^{A(\sigma^0)\vartheta_k}$$
uniformément en p premier et en k ;
5. $\mathfrak{c}_0(c_p, p) = c_p^q$, *en particulier*
$$|\mathfrak{c}_0(c_p, p)| = |c|^{\frac{1}{\langle \theta, \widehat{\alpha}_e \rangle}}.$$

De plus

$$\{\mathfrak{c}_0(c_p, p); c_p \in \mathfrak{p}\} = \{u \in \mathbf{C};\ \exists c \text{ racine de } \widetilde{[h]}_e(T) \text{ tel que } u^{\langle \theta, \widehat{\alpha}_e \rangle} = p^{i\langle \gamma^0, \widehat{\alpha}_e \rangle} c\}.$$

Preuve. On effectue le changement de variable $Y = Y_1^q$. Le problème se ramène à la résolution de l'équation

$$\begin{aligned}
\tilde{W}^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X, Y_1) &:= W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X, Y_1^q) \\
&= 1 + \textstyle\sum_{j=1}^r a_j p^{-i\langle \gamma^0, \alpha_j \rangle} X^{\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle} Y_1^{q\langle \theta, \alpha_j \rangle} \\
&= 1 + \sum_{j \in \Lambda_e} a_j p^{-i\langle \gamma^0, \alpha_j \rangle} Y_1^{q\langle \theta, \alpha_j \rangle} + \sum_{j \notin \Lambda_e} a_j p^{-i\langle \gamma^0, \alpha_j \rangle} X^{\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle} Y_1^{q\langle \theta, \alpha_j \rangle} \\
&= 1 + \sum_{j \in \Lambda_e} a_j p^{-iq_j\langle \gamma^0, \widehat{\alpha}_e \rangle} Y_1^{qq_j\langle \theta, \widehat{\alpha}_e \rangle} + \sum_{j \notin \Lambda_e} a_j p^{-i\langle \gamma^0, \alpha_j \rangle} X^{\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle} Y_1^{q\langle \theta, \alpha_j \rangle}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Si maintenant $Y_1 = Y_1(X) = c_p + o(1)$ pour $X \to 0^+$ est solution de $\tilde{W}_{\mathbf{s}^0,\theta}(X, Y_1) = 0$ lorsque $X \to 0^+$, alors on a nécessairement :

$$1 + \sum_{j \in \Lambda_e} a_j p^{-iq_j\langle \gamma^0, \widehat{\alpha}_e \rangle} c_p^{qq_j\langle \theta, \widehat{\alpha}_e \rangle} = 0;$$

et donc

$$c = p^{-i\langle \gamma^0, \widehat{\alpha}_e \rangle} c_p^{q\langle \theta, \widehat{\alpha}_e \rangle}$$

est une racine du polynôme $\widetilde{[h]_e}(T) = 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j T^{q_j}$. On en déduit que c_p est une racine $q\langle\theta, \widehat{\alpha}_e\rangle$-ième de $p^{i\langle\gamma^0,\widehat{\alpha}_e\rangle}c$ où c est une racine du polynôme $\widetilde{[h]_e}(T)$.
C'est à dire $c_p \in \mathfrak{p}$.

Réciproquement, soit $c_p \in \mathfrak{p}$. Il existe alors une racine c du polynôme $\widetilde{[h]_e}(T)$ telle que $c_p^{q\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle} = p^{i\langle\gamma^0,\widehat{\alpha}_e\rangle}c$.

La racine c de $\widetilde{[h]_e}(T)$ est nécessairement non nulle puisque $\widetilde{[h]_e}(0) = 1 \neq 0$.

On effectue le changement de variable

$$Y_1 = c_p\,(1+Y_2)\,.$$

On cherche $Y_2 = Y_2(X)$ tel que $\tilde{W}^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X, c_p(1+Y_2(X))) = 0$ et $Y_2(X) \to 0$ lorsque $X \to 0^+$.

On pose :

$$G(X, Y_2) := \tilde{W}^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X, c_p(1+Y_2)).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} G(X,Y_2) &= 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j p^{-iq_j\langle\gamma^0,\widehat{\alpha}_e\rangle} c_p^{qq_j\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle}\,(1+Y_2)^{qq_j\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle} \\ &\quad + \sum_{j\notin\Lambda_e} a_j p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle} X^{\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle} c_p^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle}(1+Y_2)^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle} \\ &= 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j c^{q_j}(1+Y_2)^{qq_j\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle} \\ &\quad + \sum_{j\notin\Lambda_e} a_j p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle} c_p^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle} X^{\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}\,(1+Y_2)^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle} \end{aligned}$$

Etant donné que les $\langle\theta, \alpha_j\rangle \in \mathbf{Q}_{>0}$ et que les $\langle\sigma^0, \alpha_j\rangle \in \mathbf{R}_{>0}$ ($j \notin \Lambda_e$) et vu le choix de q, $G(X, Y_2)$ est définie et holomorphe sur $\mathcal{D}_1 := (\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-) \times \mathbf{C}$.

Posons pour tout $\mathbf{X} = (X_j)_{j\notin\Lambda_e} \in \mathbf{C}^{r-\#\Lambda_e}$ et pour tout $Y_2 \in \mathbf{C}$:

$$F(\mathbf{X}, Y_2) := 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j c^{q_j}(1+Y_2)^{qq_j\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle} + \sum_{j\notin\Lambda_e} a_j X_j (1+Y_2)^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle}.$$

La fonction polynomiale $(\mathbf{X}, Y_2) \longmapsto F(\mathbf{X}, Y_2)$ est clairement holomorphe dans $\mathcal{U} = \mathbf{C}^{r-\#\Lambda_e} \times \mathbf{C}$ et on remarque également que ce polynôme ne dépend pas de p.

D'autre part, pour tout $(X, Y_2) \in \mathcal{D}_1$ on a :

$$G(X, Y_2) = F\left(\left(p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle} c_p^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle} X^{\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}\right)_{j\notin\Lambda_e}, Y_2\right). \tag{2.28}$$

Par ailleurs, on vérifie facilement qu'au voisinage de $(\mathbf{X}, Y_2) = (\mathbf{0}, 0)$ on a :

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{X}, Y_2) &= 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j c^{q_j}\left(1 + qq_j\langle\theta, \widehat{\alpha}_e\rangle Y_2 + O(Y_2^2)\right) + O\left(\|X\|\right) \\
&= 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j c^{q_j} + q\langle\theta, \widehat{\alpha}_e\rangle\left(\sum_{j\in\Lambda_e} a_j q_j c^{q_j}\right) Y_2 + O\left(\|X\|\right) + O\left(Y_2^2\right) \\
&= \widetilde{[h]}_e(c) + q\langle\theta, \widetilde{\alpha}_e\rangle c\widetilde{[h]}_e'(c) Y_2 + O\left(\|X\|\right) + O\left(Y_2^2\right).
\end{aligned}$$

Et puisque la face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ est une face non dégénérée par hypothèse, c est une racine simple de $\widetilde{[h]}_e(T)$, et donc $\widetilde{[h]}_e(c) = 0$ et $\widetilde{[h]}_e'(c) \neq 0$.

On en déduit que

$$\frac{\partial F}{\partial Y_2}(\mathbf{0}, 0) = q\langle\theta, \widehat{\alpha}_e\rangle c\widetilde{[h]}_e'(c) \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites il existe donc $\epsilon_0 = \epsilon_0(h) > 0$ (indépendant de p) tel que

$$\begin{cases}\mathbf{X} \in D(\mathbf{0}, \epsilon_0) = \{\mathbf{X} \in \mathbf{C}^{r-\#\Lambda_e} \mid \|X\| < \epsilon_0\} \\ F(\mathbf{X}, Y_2) = 0\end{cases}$$

équivaut à

$$\begin{cases}\mathbf{X} \in D(\mathbf{0}, \epsilon_0) = \{\mathbf{X} \in \mathbf{C}^{r-\#\Lambda_e} \mid \|X\| < \epsilon_0\} \\ Y_2 = V_{c_p}(\mathbf{X});\end{cases} \tag{2.29}$$

où

$$\begin{aligned}
V_{c_p}(\mathbf{X}) &= \sum_{(\mu_j)_{j\notin\Lambda_e} = \mu \in \mathbf{N}^{r-\#\Lambda_e}} A(c_p; \mu)\mathbf{X}^\mu \\
&= \sum_{(\mu_j)_{j\notin\Lambda_e} = \mu \in \mathbf{N}^{r-\#\Lambda_e}} A(c_p; \mu) \prod_{j\notin\Lambda_e} X_j^{\mu_j}
\end{aligned}$$

converge et est holomorphe dans $D(\mathbf{0}, \epsilon_0)$.

En particulier, on a uniformément en p premier et en μ :

$$|A(c_p; \mu)| \ll \left(\frac{2}{\epsilon_0}\right)^{\sum_{j\notin\Lambda_e}\mu_j}. \tag{2.30}$$

Maintenant comme $\langle\sigma^0, \alpha_j\rangle > 0$ pour tout $j \notin \Lambda_e$ et comme $|p^{-i\langle\gamma^0, \alpha_j\rangle} c_p^{q\langle\theta, \alpha_j\rangle}| = |c|^{\frac{\langle\theta, \alpha_j\rangle}{\langle\theta, \widehat{\alpha}_e\rangle}}$ pour tout $j \notin \Lambda_e$, alors l'identité (2.28) implique l'existence de $\epsilon_1 = \epsilon_1(h, \sigma^0) > 0$ (indépendant de p) tel que pour tout $X \in \mathcal{H} := \{X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- : |X| < \epsilon_1\}$, le point

$$\mathbf{X}(p) = \left(p^{-i\langle\gamma^0, \alpha_j\rangle} c_p^{q\langle\theta, \alpha_j\rangle} X^{\langle\sigma^0, \alpha_j\rangle}\right)_{j\notin\Lambda_e} \in D(\mathbf{0}, \epsilon_0);$$

et

$$V_{c_p}(\mathbf{X}(p)) = \sum_{\mu=(\mu_j)_{j\notin\Lambda_e}} A(c_p;\mu)p^{-i\sum_{j\notin\Lambda_e}\mu_j\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle} c_p^{q\sum_{j\notin\Lambda_e}\mu_j\langle\theta,\alpha_j\rangle} X^{\sum_{j\notin\Lambda_e}\mu_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}.$$

Notons

$$\mathfrak{K} := \left\{\sum_{j\notin\Lambda_e}\mu_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle : \mu = (\mu_j)_{j\notin\Lambda_e} \in \mathbf{N}^{r-\#\Lambda_e}\right\}.$$

$\mathfrak{K}$ est une partie discrète de $\mathbf{R}_+^*$ et il existe une suite strictement croissante (finie ou infinie) de $\mathbf{R}_+^*$ telle que

$$\mathfrak{K} = \{\vartheta_k : k = 1,\ldots,\kappa_{c_p}\}$$

avec $\kappa_{c_p} \in \mathbf{N}\cup\{+\infty\}$.

De plus, il est clair que si $\kappa_{c_p} = +\infty$ alors $\lim_{k\to+\infty}\vartheta_k = +\infty$.

Et si on pose pour tout $k \leq \kappa_{c_p}$:

$$\mathfrak{c}_k(c_p,p) = \sum_{\substack{\mu=(\mu_j)_{j\notin\Lambda_e}\in\mathbf{N}^{r-\#\Lambda_e}\\ \sum_{j\notin\Lambda_e}\mu_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle=\vartheta_k}} A(c_p;\mu)p^{-i\sum_{j\notin\Lambda_e}\mu_j\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle} c_p^{q\sum_{j\notin\Lambda_e}\mu_j\langle\theta,\alpha_j\rangle};$$

le fait que $\mu_j \leq \frac{\vartheta_k}{\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}$ pour tout $j\notin\Lambda_e$ puisque $\sum_{j\notin\Lambda_e}\mu_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle = \vartheta_k$ et (2.30) fournissent l'estimation

$$|\mathfrak{c}_k(c_p,p)| \ll \left(\frac{2}{\epsilon_0}\right)^{\left(\sum_{j\notin\Lambda_e}\frac{1}{\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}\right)\vartheta_k} \prod_{j\notin\Lambda_e}\frac{\vartheta_k}{\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle} \tag{2.31}$$

uniformément en p premier et en k.
On a par conséquent pour tout $X \in \mathcal{H} = \{X\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_- : |X| < \epsilon_1\}$:

$$V_{c_p}(\mathbf{X}(p)) = \sum_{k=1}^{\kappa_{c_p}}\mathfrak{c}_k(c_p,p)X^{\vartheta_k}.$$

On conclut en utilisant le fait que $Y = (c_p(1+Y_2))^q = c_p^q(1+Y_2)^q$. □

Remarque 6. Notons que les solutions obtenues en Y de $W^p_{s^0,\theta}(X,Y) = 0$ apparaissent comme des puissances q-ièmes.

Il n'y aura donc pas de problème dans la suite liées aux manipulations des puissances rationnelles $\langle\theta,\alpha_j\rangle$ en Y de $W^p_{s^0,\theta}(X,Y)$ lorsque l'on remplacera Y par ces solutions.

Pour alléger l'écriture introduite dans la proposition précédente, dans toute la suite on notera les solutions de $W_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)=0$ (en nombre fini) de la façon suivante :

$$\Omega_k^p(X)=c_{k,0}^p+c_{k,1}^pX^{\vartheta_{k,1}}+\cdots+c_{k,N}^pX^{\vartheta_{k,N}}+\cdots;\ (k\in\{1,\ldots,f\})$$

où $\vartheta_{k,N}>\cdots,>\vartheta_{k,1}>0$ et $c_{k,m}^p\in\mathbf{C}$ pour tout $m\geq 0$.
On a en particulier que $c_{k,0}^p$ est une racine du polynôme d'une variable :

$$[W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p]_e(X):=1+\sum_{j\in\Lambda_e}a_jp^{-i\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle}X^{\langle\theta,\alpha_j\rangle}.$$

On peut aussi remarquer que si on pose

$$c_{k,0}:=c_{k,0}^p p^{-i\frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}},\tag{2.32}$$

$|c_{k,0}|=|c_{k,0}^p|$ et $c_{k,0}$ est une racine de

$$[h]_e^\theta(X):=1+\sum_{j\in\Lambda_e}a_jX^{\langle\theta,\alpha_j\rangle}.$$

On peut ainsi décrire les zéros de $t\longmapsto W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p(p^{-1},p^{-t})$ via ces branches de puiseux ; ils s'expriment comme suit :

$$t_{m,p}=-\frac{\log\left(\Omega_k^p\left(p^{-1}\right)\right)}{\log(p)}+\frac{2\pi mi}{\log(p)};$$

où $m\in\mathbf{Z}$ et p désigne un nombre premier assez grand.

La principale difficulté consiste maintenant à trouver une infinité de $t_{m,p}$ de partie réelle strictement positive ; ce qui revient à trouver des branches de Puiseux $\Omega_k^p(X)$ telles que $|\Omega_k^p(X)|<1$ pour $X>0$ assez petit de sorte que, pour p assez grand, on ait $t_{m,p}\in\Xi_{u,\eta}$ et on montrera dans la suite que l'on peut toujours trouver une telle branche $\Omega_k^p(X)$ telle que $|\Omega_k^p(X)|<1$ pour $X>0$ suffisamment petit.

Notons au passage que pour p assez grand $W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p(X,Y)$ est bien défini en posant $X=p^{-1}$ et $Y=p^{-t(m,p)}$ puisque $p^{-1}\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-$ et $p^{-t(m,p)}\in\mathbf{C}\setminus e^{i\mathfrak{b}}\mathbf{R}_+$ puisque :

$$\begin{aligned}\Im(t(m,p)) &= \Im\left(-\frac{\log\left(\Omega_k^p(p^{-1})\right)}{\log(p)}+\frac{2i\pi m}{\log(p)}\right)\\ &= \frac{-\arg(c_{k,0}^p)+O\left(p^{-\vartheta_{k,1}}\right)+2\pi m}{\log(p)}\\ &= \frac{-\arg(c_{k,0})+O\left(p^{-\vartheta_{k,1}}\right)+2\pi m}{\log(p)}-\frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}\notin\frac{-\mathfrak{b}+2\mathbf{Z}\pi}{\log(p)}\end{aligned}$$

si on choisit $\gamma^0 \in \mathbf{R}^n$ de façon générique.

Maintenant si $[h]_e^\theta(X)$ n'est pas cyclotomique (ce qui revient à dire que $[h]_e$ et $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$ ne sont pas cyclotomiques), compte-tenu du fait qu'il s'agit d'un polynôme à coefficients entiers dont le produit des racines est inférieur ou égal à 1, il va exister au moins une racine c_{k_0} de module strictement inférieur à 1 qui fournira un $c^p_{k,0}$ tel que $|c^p_{k,0}| < 1$ et donc une branche de Puiseux $\Omega^p_k(X)$ telle que $|\Omega^p_k(X)| < 1$ pour $|X|$ petit comme souhaitée.

La situation est plus compliquée lorsque $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$ est cyclotomique puisqu'il sera nécessaire d'étudier le deuxième terme qui apparaît dans le développement des branches de Puiseux $\Omega^p_k(X)$ de $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$.

Supposons donc, pour les deux prochains lemmes 5 et 6 à venir, que $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$ est cyclotomique.

Considérons un ensemble noté J de représentants de chacune des classes de la relation d'équivalence $\sim$ suivante :

$$\alpha_j \sim \alpha_{j'} \Longleftrightarrow \alpha_j - \alpha_{j'} \in \mathbf{Q}\alpha_e.$$

On écrit alors

$$W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y) = [W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e(Y) + \sum_{j_0\in J; j_0 \not\sim e} X^{\langle \sigma^0, \alpha_{j_0}\rangle} R^p_{j_0}(Y);$$

où

$$R^p_{j_0}(Y) = \sum_{j\sim j_0} a_j p^{-i\left\langle \gamma^0, \alpha_j \right\rangle} Y^{\langle \theta, \alpha_j\rangle}.$$

Rappelons que puisque l'on suppose ici que $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e(Y)$ est un polynôme cyclotomique, toutes ses racines sont de module 1.

Soit maintenant $c^p_{k,0}$ une racine de $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$ de multiplicité $m_0 = 1$ puisque $\mathcal{F}(\alpha_e)$ est non dégénérée au sens de la définition 8.

Considérons en particulier un indice e' tel que

$$\langle \sigma^0, \alpha_{e'}\rangle > 0$$

est minimal parmi les $\langle \sigma^0, \alpha_{j_0}\rangle > 0$ ($j_0 \in J, j_0 \not\sim e$) tels que $R^p_{j_0}(c^p_{k,0}) \neq 0$.

Notons tout de suite qu'un tel indice e' existe bien d'après le lemme 4 précédent.

On a en effet :

$$R^p_{j_0}(c^p_{k,0}) = \sum_{j\sim j_0} a_j p^{-i\left\langle \gamma^0, \alpha_j - \alpha_e \frac{\langle \theta, \alpha_j\rangle}{\langle \theta, \alpha_e\rangle}\right\rangle} c_{k,0}{}^{\langle \theta, \alpha_j\rangle} \text{ d'après (2.32).}$$

Or si $\alpha_j = \alpha_{j_0} + q\alpha_e$, on obtient :

$$\begin{aligned}\alpha_j - \alpha_e \tfrac{\langle\theta,\alpha_j\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle} &= \alpha_{j_0} + q\alpha_e - \alpha_e \tfrac{\langle\theta,\alpha_{j_0}\rangle + q\langle\theta,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle} \\ &= \alpha_{j_0} - \alpha_e \tfrac{\langle\theta,\alpha_{j_0}\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}.\end{aligned}$$

Par conséquent puisque les $\alpha_j - \alpha_e \frac{\langle\theta,\alpha_j\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}$ sont tous égaux pour $j \sim j_0$ on a :

$$R^p_{j_0}(c^p_{k,0}) = 0$$

équivaut à

$$R_{j_0}(c_{k,0}) := \sum_{j\sim j_0} a_j {c_{k,0}}^{\langle\theta,\alpha_j\rangle} = 0. \tag{2.33}$$

Ainsi si e' n'existait pas, on aurait pour tout $X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$:

$$W_{s^0,\theta}(X, c_{k,0}) := W^p_{s^0,\theta} \mid_{\gamma^0=\mathbf{0}} (X, c_{k,0}) = [h]^\theta_e(c_{k,0}) + \sum_{j_0\in J; j_0 \not\sim e} X^{\langle\sigma^0,\alpha_{j_0}\rangle} R_{j_0}(c_{k,0}) = 0;$$

ce qui est impossible d'après le lemme 4 puisqu'ici $|c_{k,0}| = |c^p_{k,0}| = 1$.

Bien entendu, il peut exister des j_0 tel que

$$\langle\sigma^0, \alpha_{e'}\rangle = \langle\sigma^0, \alpha_{j_0}\rangle. \tag{2.34}$$

Cependant, si $\sigma^0 \in \mathbf{R}^n$ est choisi de façon générique de sorte que $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{B} \cap \partial W(0)$, l'égalité (2.34) entraîne nécessairement que $j_0 \sim e'$.

Pour la suite il sera nécessaire d'imposer deux conditions supplémentaires sur θ.

On suppose à partir de maintenant que $\theta \in \mathbf{Q}^n$ satisfait, en plus de (2.14), les deux conditions suivantes :

$$\begin{array}{l} (a)\ \langle\theta, \widehat{\alpha}_e\rangle \in \mathbf{Z}_+ \textit{ est pair;} \\ (b)\ \langle\theta, \alpha_{e'}\rangle \in \mathbf{Z}_+ \textit{ est impair.} \end{array} \tag{2.35}$$

Remarquons qu'il est possible d'imposer de telles conditions sur θ.

En effet, la condition (2.14) est satisfaite si on suppose par exemple que $\theta_\ell > 1$ pour tout $\ell \in \{1, \ldots, n\}$.

De plus, $\widehat{\alpha}_e$ et $\alpha_{e'}$ ne sont pas colinéaires (puisque $\langle\sigma^0, \alpha_{e'}\rangle > 0$) ; on peut donc supposer sans perte de généralité que $\det \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_e^{\,1} & \widehat{\alpha}_e^{\,2} \\ \alpha^1_{e'} & \alpha^2_{e'} \end{pmatrix} \neq 0$ et si on pose $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta')$ et $\alpha_j = (\alpha^1_j, \alpha^2_j, \alpha'_j)$ pour $j \in \{e, e'\}$ (ayant fixé θ' tel que $\theta_\ell > 1$ pour $\ell > 2$), alors les conditions (a) et (b) de (2.35) seront satisfaites si on est en mesure de trouver une solution $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{Q}^2$ vérifiant $\theta_1 > 1, \theta_2 > 1$ d'un certain système

$$\begin{cases} \alpha^1_e\theta_1 + \alpha^2_e\theta_2 = A_k := 2k - \langle\theta', \widehat{\alpha}'_e\rangle; \\ \alpha^1_{e'}\theta_1 + \alpha^2_{e'}\theta_2 = B_{k'} := (2k'+1) - \langle\theta', \alpha'_{e'}\rangle \end{cases} \tag{2.36}$$

pour un certain $k \in \mathbf{Z}_+$ et un certain $k' \in \mathbf{Z}_+$.

Et les solutions (θ_1, θ_2) de (2.36) sont données par :

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\alpha^2_{e'} A_k - \widehat{\alpha}^2_e B_{k'}}{\widehat{\alpha}^1_e \alpha^2_{e'} - \widehat{\alpha}^2_e \alpha^1_{e'}} \\ \theta_2 = \dfrac{-\alpha^1_{e'} A_k + \widehat{\alpha}^1_e B_{k'}}{\widehat{\alpha}^1_e \alpha^2_{e'} - \widehat{\alpha}^2_e \alpha^1_{e'}} \end{cases} \tag{2.37}$$

Si on suppose sans perte de généralité que

$$D := \det \begin{pmatrix} \widehat{\alpha_e}^1 & \widehat{\alpha_e}^2 \\ \alpha^1_{e'} & \alpha^2_{e'} \end{pmatrix} = \widehat{\alpha}^1_e \alpha^2_{e'} - \widehat{\alpha}^2_e \alpha^1_{e'} > 0$$

(il suffit pour cela de permuter au besoin les deux égalités dans (2.36)), vérifions que l'on peut trouver $k, k' \in \mathbf{Z}_+$ tel que :

$$\begin{matrix} \alpha^2_{e'} A_k - \widehat{\alpha}^2_e B_{k'} > D \\ -\alpha^1_{e'} A_k + \widehat{\alpha}^1_e B_{k'} > D. \end{matrix} \tag{2.38}$$

Or si $\widehat{\alpha}^2_e = 0$ ou $\alpha^1_{e'} = 0$, il est clair que (2.38) sera vérifiée pour k, k' assez grand. Et sinon on obtient :

$$\frac{D + \widehat{\alpha}^2_e B_{k'}}{\alpha^2_{e'}} < A_k < \frac{B_{k'} \widehat{\alpha}^1_e - D}{\alpha^1_{e'}}; \tag{2.39}$$

et puisque

$$\left(\frac{B_{k'} \widehat{\alpha}^1_e - D}{\alpha^1_{e'}} \right) - \left(\frac{D + \widehat{\alpha}^2_e B_{k'}}{\alpha^2_{e'}} \right) = D \frac{B_{k'}}{\alpha^1_{e'} \alpha^2_{e'}} - D \left(\frac{1}{\alpha^1_{e'}} + \frac{1}{\alpha^2_{e'}} \right) \underset{k' \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

il est clair que l'on peut trouver k et $k' \in \mathbf{Z}_+$ tel qu'on ait (2.39) et donc (2.38), ce qui justifie les conditions que l'on peut imposer sur θ.

Notons qu'avec ce choix de θ, si $j_0 \sim e'$ alors $\langle \theta, \alpha_{j_0} \rangle$ est bien un entier impair.

En effet, $j_0 \sim e'$ implique l'existence de $q \in \mathbf{N}$ tel que $\alpha_{j_0} = \alpha_{e'} + q\widehat{\alpha}_e$; $\langle \theta, \alpha_{j_0} \rangle$ est donc impair puisque $\langle \theta, \alpha_{e'} \rangle$ est impair et $\langle \theta, \widehat{\alpha}_e \rangle$ est pair.

De même, puisque tous les $\langle \theta, \alpha_j \rangle$ pour $j \in \Lambda_e$ sont des entiers pairs, on a aussi que $-c^p_{k,0}$ est une racine de $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$.

Avant de montrer l'existence d'une accumulation de zéros $t_{m,p} \in \Xi_{u,\eta}$ (lemme 6), débutons par énoncer une propriété très utile :

Lemme 5. *Soit $\Omega^p_k(X) = c^p_{k,0} + c^p_{k,1} X^{\vartheta_{k,1}} + o\left(X^{\vartheta_{k,1}}\right)$ une branche de Puiseux de terme initial $c^p_{k,0}$, racine de $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$.*

Quitte à perturber $\gamma^0 \in \mathbf{R}^n$ de sorte que $\boldsymbol{s}^0 \in \partial W(0) \cap \mathcal{B}$, on peut supposer

$$\arg\left(\frac{c^p_{k,1}}{c^p_{k,0}}\right) \neq \frac{\pi}{2} \mod (\pi).$$

Ce lemme sera montré juste après la preuve du lemme 6 qui suit.

Remarque 7. On peut voir ce résultat comme un résultat de généricité au niveau de $\arg\left(\frac{c^p_{k,1}}{c^p_{k,0}}\right)$.

Remarquons que cette propriété, fondamentale pour montrer l'accumulation des zéros $t_{m,p} \in \Xi_{u,\eta}$ (voir lemme 6), n'est possible que parce que l'on peut déplacer le point $\mathbf{s}^0$ dans une boule $\mathcal{B}$; ce qui permet de pouvoir perturber librement $\gamma^0 \in \mathbf{R}^n$.

Lemme 6. *On suppose que $[W^p_{\boldsymbol{s}^0,\theta}]_e$ est un polynôme cyclotomique.*

Il existe une série de Puiseux $\Omega^p_k(X)$, solution de $W^p_{\boldsymbol{s}^0,\theta}(X,Y) = 0$, vérifiant

$$|\Omega^p_k(X)| < 1 \textit{ pour } X \textit{ strictement positif au voisinage de } 0;$$

ce qui fournit une infinité de zéros $t_{m,p} \in \Xi_{u,\eta}$ de $\prod_{p \leq M_\delta} h(p^{-s^0_1 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s^0_n - t\theta_n})$.

Preuve. Considérons une branche de Puiseux que l'on notera

$$\Omega^p_{k_+}(X) = c^p_{k,0} + c^p_{k_+,1} X^{\vartheta_{k_+,1}} + o\left(X^{\vartheta_{k_+,1}}\right)$$

de terme principale la racine $c^p_{k,0}$ de $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$ introduite précédemment.

D'après le lemme 5 précédent, quitte à perturber γ^0 on peut supposer que

$$\arg\left(\frac{c^p_{k_+,1}}{c^p_{k,0}}\right) \neq \frac{\pi}{2} \mod (\pi).$$

On a donc

$$\frac{\pi}{2} < \arg\left(\frac{c^p_{k_+,1}}{c^p_{k,0}}\right) < \frac{3\pi}{2} \text{ ou bien } \frac{\pi}{2} < \arg\left(-\frac{c^p_{k_+,1}}{c^p_{k,0}}\right) < \frac{3\pi}{2}.$$

Puisque $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$ est supposé cyclotomique, le terme principal de $\Omega^p_{k_+}$ est de module $|c^p_{k,0}| = 1$.

Mais si l'on suppose tout d'abord que $\frac{\pi}{2} < \arg\left(\frac{c^p_{k_+,1}}{c^p_{k,0}}\right) < \frac{3\pi}{2}$, on a :

$$\left|\Omega^p_{k_+}(X)\right| = \left|1 + \frac{c^p_{k_+,1}}{c^p_{k,0}} X^{\vartheta_{k_+,1}} + o(X^{\vartheta_{k_+,1}})\right| < 1 \quad \textit{pour } X > 0 \textit{ petit.}$$

Donc $\Omega_k^p(X) = \Omega_{k_+}^p(X)$ nous convient et c'est la série de Puiseux recherchée.

Supposons donc maintenant que

$$\frac{\pi}{2} < \arg\left(-\frac{c_{k_+,1}^p}{c_{k,0}^p}\right) < \frac{3\pi}{2}.$$

On va montrer que le choix particulier de θ (voir (2.35) page 58) fait que l'on va trouver une série de Puiseux de terme initial $-c_{k,0}^p$ et de même second terme que celui de $\Omega_{k_+}^p$ et qui sera donc la série recherchée.

Tout d'abord, puisque $\theta \in \mathbf{Q}^n$ a été choisi de sorte que pour $j \in \Lambda_e$ $\langle\theta, \alpha_j\rangle$ soit pair, on sait que $-c_{k,0}^p$ est également une racine de $[W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p]_e$; considérons donc une autre branche de Puiseux que l'on notera

$$\Omega_{k_-}^p(X) = -c_{k,0}^p + c_{k_-,1}^p X^{\vartheta_{k_-,1}} + o\left(X^{\vartheta_{k_-,1}}\right)$$

dont le terme initial est cette racine $-c_{k,0}^p$.

Comparons les deux termes $c_{k_-,1}^p X^{\vartheta_{k_-,1}}$ et $c_{k_+,1}^p X^{\vartheta_{k_+,1}}$. Pour cela on utilise le fait que les termes de plus bas degré en X de $W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p\left(X, \Omega_{k_\pm}^p(X)\right)$ se simplifient ; et ces termes coincident avec ceux de $W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p\left(X, \pm c_{k,0}^p + c_{k_\pm,1}^p X^{\vartheta_{k_\pm,1}}\right)$.

Et ces termes de plus bas degré sont également ceux de l'expression suivante :

$$c_{\pm k,1}^p [W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p]'_e\left(\pm c_{k,0}^p\right) X^{\vartheta_{\pm k,1}} + X^{\langle\sigma^0,\alpha_{e'}\rangle} R_{e'}^p\left(\pm c_{k,0}^p\right). \tag{2.40}$$

On a donc d'une part pour ce qui concerne la branche $\Omega_{k_+}^p$:

$$c_{k_+,1}^p = -\frac{R_{e'}^p(c_{k,0}^p)}{[W_{s^0,\theta}^p]'_e(c_{k,0}^p)}; \tag{2.41}$$

et d'autre part pour ce qui concerne la branche $\Omega_{k_-}^p$:

$$c_{k_-,1}^p = -\frac{R_{e'}^p(-c_{k,0}^p)}{[W_{s^0,\theta}^p]'_e(-c_{k,0}^p)} = -\frac{(-1)^{\langle\theta,\alpha_{e'}\rangle} R_{e'}^p(c_{k,0}^p)}{-[W_{s^0,\theta}^p]'_e(c_{k,0}^p)}. \tag{2.42}$$

Et puisque $\langle\theta, \alpha_{e'}\rangle$ est un entier impair on obtient $c_{k_+,1}^p = c_{k_-,1}^p$.

Remarquons d'autre part que chaque racine $c_{k,0}^p$ et $-c_{k,0}^p$ fournit une série de Puiseux correspondante solution de $W_{s^0,\theta}(X,Y) = 0$ d'après la proposition 2.

Et donc finalement il existe bien une série de Puiseux

$$\Omega_k^p(X) = -c_{k,0}^p + c_{k_+,1}^p X^{\vartheta_{k_+,1}} + o\left(X^{\vartheta_{k_+,1}}\right)$$

qui est telle que $|\Omega_k^p(X)| < 1$ pour $X > 0$ au voisinage de 0.

Cette série fournit des zéros

$$t_{m,p} = -\frac{\log\left(\Omega_k^p\left(p^{-1}\right)\right)}{\log(p)} + \frac{2\pi m i}{\log(p)};$$

où $m \in \mathbf{Z}$ et p désigne un nombre premier.

Et on aura $t_{m,p} \in \Xi_{u,\eta}$ si $u < \Im(t_{m,p}) < u + \eta$; autrement dit si :

$$u < \frac{2\pi m}{\log(p)} - \frac{\arg\left(\Omega_k\left(p^{-1}\right)\right)}{\log(p)} < u + \eta,$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{u\log(p)}{2\pi} + \frac{\arg\left(\Omega_k\left(p^{-1}\right)\right)}{2\pi} < m < \frac{(u+\eta)\log(p)}{2\pi} + \frac{\arg\left(\Omega_k\left(p^{-1}\right)\right)}{2\pi}. \tag{2.43}$$

On aura donc pour p suffisamment grand des zeros de $t \to W^p_{\mathbf{s^0},\theta}(p^{-1}, p^{-t})$ dans $\Xi_{u,\eta}$.

Il y a donc une infinité de zéros $t_{m,p} \in \Xi_{u,\eta}$ de $\prod_{p \leq M_\delta} h(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n})$ lorsque $\delta \to 0$; ce qui termine la preuve de ce lemme.

□

Montrons maintenant le lemme 5 :

Preuve (lemme 5). On cherche ici à tirer profit de la liberté que l'on a dans le choix de $\gamma^0 \in \mathbf{R}^n$ de sorte que $s^0 \in \partial W(0) \cap \mathcal{B}$.

Reprenons l'expression de $c^p_{k,1}$ que l'on a obtenu en (2.41) au cours de la preuve du lemme 6 :

$$c^p_{k,1} = -\frac{R^p_{e'}(c^p_{k,0})}{[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]'_e(c^p_{k,0})}$$

Montrons tout d'abord que le dénominateur $c^p_{k,0}[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]'_e\left(c^p_{k,0}\right)$ de $\frac{c^p_{k,1}}{c^p_{k,0}}$ ne dépend ni de p ni de γ^0.

En effet :

$$\begin{aligned} c^p_{k,0}[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]'_e\left(c^p_{k,0}\right) &= c_{k,0} p^{i\frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}} \sum_{j\in\Lambda_e} a_j \langle\theta,\alpha_j\rangle c_{k,0}^{\langle\theta,\alpha_j\rangle-1} p^{i\left(\frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}(\langle\theta,\alpha_j\rangle-1)-\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle\right)} \\ &= \sum_{j\in\Lambda_e} a_j\langle\theta,\alpha_j\rangle c_{k,0}^{\langle\theta,\alpha_j\rangle}, \end{aligned}$$

puisque $j \in \Lambda_e$ implique $\frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}\langle\theta,\alpha_j\rangle = \langle\gamma^0,\alpha_j\rangle$.

Maintenant supposons par l'absurde que pour tout $\gamma^0 \in \mathbf{R}^n$ tel que $\mathbf{s}^0 \in \partial W(0) \cap \mathcal{B}$ il existe un nombre premier p tel que

$$\arg\left(\frac{c^p_{k,1}}{c^p_{k,0}}\right) = \frac{\pi}{2} \mod (\pi),$$

Posons pour m tel que $m \sim e'$:

$$\lambda_m := -\frac{a_m\ c_{k,0}^{\langle\theta,\alpha_m\rangle}}{\sum_{j\in\Lambda_e} a_j \langle\theta,\alpha_j\rangle c_{k,0}^{\langle\theta,\alpha_j\rangle}} \in \mathbf{C}$$

qui ne dépend ni de p ni de γ^0.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{c^p_{k,1}}{c^p_{k,0}} &= \sum_{\{m:\alpha_m-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e\}} \lambda_m p^{i\left(\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle\frac{\langle\theta,\alpha_m\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}-\langle\gamma^0,\alpha_m\rangle\right)} \\
&= \sum_{\{m:\alpha_m-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e\}} \lambda_m p^{i\langle\gamma^0,w_m\rangle},
\end{aligned}$$

Si on écrit

$$w_m := \frac{\langle\theta,\alpha_m\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}\alpha_e - \alpha_m.$$

Remarquons que ces w_m sont tous égaux. Si en effet m, m' sont tels que $\alpha_m - \alpha_{e'} \in \mathbf{Q}\alpha_e$ et $\alpha_{m'} - \alpha_{e'} \in \mathbf{Q}\alpha_e$, alors $\alpha_m - \alpha_{m'} \in \mathbf{Q}\alpha_e$ et il existe donc $q \in \mathbf{Q}$ tel que :

$$\alpha_m - \alpha_{m'} = q\alpha_e.$$

Mais alors

$$\frac{\langle\theta,\alpha_m-\alpha_{m'}\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}\alpha_e = q\alpha_e = \alpha_m - \alpha_{m'};$$

et donc $w_m = w_{m'}$.

On a finalement :

$$\frac{c^p_{k,1}}{c^p_{k,0}} = p^{i\langle\gamma^0,w_{e'}\rangle} \sum_{m|\alpha_m-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e} \lambda_m.$$

Si on pose maintenant

$$\varphi := \arg\left(\sum_{m|\alpha_m-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e} \lambda_m\right);$$

(φ ne dépend ni de p ni de γ^0), on obtient alors que pour tout $\gamma^0 \in \mathbf{R}^n$ tel que $\mathbf{s}^0 \in \partial W(0) \cap \mathcal{B}$ il existe un nombre premier tel que :

$$\langle \gamma^0, w_{e'} \rangle \log(p) + \varphi \mod (2\pi) \in \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

Or l'ensemble

$$M := \bigcup_p \bigcup_{u \in \mathbf{Z}} \left\{ \gamma^0 \in \mathbf{R}^n : \langle \gamma^0, w_{e'} \rangle \log(p) + \varphi = \frac{\pi}{2} + u\pi \right\}.$$

est un ensemble d'intérieur vide d'après le théorème de Baire puisqu'il s'agit d'une réunion dénombrable d'ensembles d'intérieur vide.

Par conséquent ces conditions précédentes ne peuvent être satisfaites pour tout γ^0 inclus dans une boule de $\mathbf{R}^n$; on obtient donc une contradiction à l'hypothèse énoncée plus haut, ce qui termine la preuve de ce lemme.

$\square$

A ce stade, on a donc trouvé une infinité de zéros $t_{m,p}$ de $t \longmapsto W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(p^{-1}, p^{-t})$ qui s'accumulent dans $\Xi_{u,\eta}$.

On ne suppose plus à partir de maintenant que $[W^p_{s^0,\theta}]_e$ *est un polynôme cyclotomique.*

Pour démontrer le théorème 8, il faut s'assurer que ces zéros ne se compensent pas avec d'éventuels pôles provenant du facteur A_{M_δ} qui sont de la forme :

$$t(\beta, \rho) = \frac{\rho - \sum_{j=1}^r \beta_j \langle \mathbf{s}^0, \alpha_j \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle};$$

où $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ et ρ est le pôle 1 ou un zéro non trivial de la fonction ζ de Riemann.

On va distinguer deux cas : le cas où $\beta \notin B_e$ et celui où $\beta \in B_e$ (voir la définition 10).

Pour le premier, on montrera (lemme 7) que pour tout $\beta \notin B_e$ et tout zéro ou pôle ρ de $\zeta(s)$, pour p assez grand ($p > p_0$ où p_0 est une constante absolue)

$$h\left(p^{-s_1^0 - t(\beta,\rho)\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t(\beta,\rho)\theta_n} \right) \neq 0.$$

Et pour cela on verra qu'après avoir précédemment exploité la souplesse que l'on avait dans le choix de θ et de γ^0, il sera nécessaire ici de perturber en plus la partie réelle σ^0 de $\mathbf{s}^0$.

En ce qui concerne le second, on montrera (lemme 8) une propriété plus faible : il se peut (notamment lorsque $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}$ admet une racine en Y indépendante de X de module strictement inférieur à 1) que certains $t(\beta, \rho)$ ($\beta \in B_e$) annulent $t \longmapsto$

$h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\dots,p^{-s_n^0-t\theta_n}\right)$; mais on verra qu'il y en a beaucoup moins que les $t_{m,p}$ considérés précédemment.

Soit donc $\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}$, ρ tel que $\zeta(\rho)=0$ (ou $\rho=1$ est le pôle de $\zeta(s)$) et un nombre premier p.

On écrit :

$$\begin{aligned} h\left(p^{-s_1^0-t(\beta,\rho)\theta_1},\dots,p^{-s_n^0-t(\beta,\rho)\theta_n}\right) &= 1+\sum_{k=1}^{r} a_k p^{-\langle \mathbf{s}^0,\alpha_k\rangle-\langle\theta,\alpha_k\rangle\left(\frac{\rho-\sum_{j=1}^r\beta_j\langle \mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}\right)} \\ &= 1+\sum_{k=1}^{r} a_k p^{\lambda_k(\sigma^0)} \end{aligned}$$

où

$$\lambda_k(\sigma^0)=\lambda_{\theta,\beta,k}(\sigma^0)=-u_k(\sigma^0)-v_k;$$

avec

$$u_k(\sigma^0)=u_{\theta,\beta,k}(\sigma^0)=\langle\sigma^0,\alpha_k\rangle-\langle\theta,\alpha_k\rangle\frac{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}$$

et

$$v_k=v_{\theta,\beta,k}=\langle\theta,\alpha_k\rangle\left(\frac{\rho-i\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}\right)+i\langle\gamma^0,\alpha_k\rangle;$$

ne dépendant pas de σ^0.

Définissons la relation d'équivalence $\mathcal{R}=\mathcal{R}_\beta$ suivante sur les α_k :

$$\alpha_k\ \mathcal{R}\ \alpha_{k'} \iff \begin{array}{l}\text{pour tout } \sigma^0 \text{ tel que } \mathbf{s}^0\in\partial W(0)\cap\mathcal{B}\\ u_k(\sigma^0)=u_{k'}(\sigma^0).\end{array}$$

On écrit la classe d'équivalence de α_{k_0} $[k_0]$. On considère également un ensemble $\mathcal{V}$ dont chaque élément est un représentant de chacune des classes.

On vérifie sans difficulté en utilisant (2.13) que l'on a :

$$\alpha_k\ \mathcal{R}\ \alpha_{k'} \iff \begin{array}{l}\text{il existe } \lambda_{\beta,k,k'} \text{ et } \mu_{\beta,k,k'}\in\mathbf{Q} \text{ tels que}\\ \alpha_k-\alpha_{k'}=\lambda_{\beta,k,k'}\sum_{j=1}^r\beta_j\alpha_j+\mu_{\beta,k,k'}\alpha_e.\end{array}$$

Remarque 8. Lorsque $\beta\in B_e$, $u_k(\sigma^0)$ est réduit à :

$$u_k(\sigma^0)=\langle\sigma^0,\alpha_k\rangle.$$

On a donc $\alpha_k\ \mathcal{R}\ \alpha_{k'}$ si et seulement si $\alpha_k-\alpha_{k'}\in\mathbf{Q}\alpha_e$ d'après la condition (2.13) de généricité sur σ^0.

On considère maintenant $\sigma^0 \longmapsto h\left(p^{-s_1^0-t(\beta,\rho)\theta_1},\dots,p^{-s_n^0-t(\beta,\rho)\theta_n}\right)$ comme une fonction notée $f_{p,\rho,\beta}(\widetilde{\sigma}_1^0,\dots,\widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$ dépendant des $(n-1)$ variables $\widetilde{\sigma}^0=(\widetilde{\sigma}_1^0,\dots,\widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$ en posant :

$$\begin{cases} \sigma_\ell^0 = \widetilde{\sigma}_\ell^0 & (l \in \{1,\dots,n-1\}), \\ \sigma_n^0 = -\dfrac{1}{\alpha_e^n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_e^i\widetilde{\sigma}_i^0 & . \end{cases}$$

On écrit de plus $\widetilde{\alpha_j} \in \mathbf{Z}^{n-1}$ pour $j \in \{1,\dots,r\}$ avec $\widetilde{\alpha_j^\ell} = \alpha_j^\ell - \frac{\alpha_j^n}{\alpha_e^n}\alpha_e^\ell$ pour $l \in \{1,\dots,n-1\}$ tel que l'on ait pour tout $j \in \{1,\dots,r\}$:

$$\langle \sigma^0, \alpha_j\rangle = \langle \widetilde{\sigma}^0, \widetilde{\alpha}_j\rangle.$$

Si l'on pose donc pour $k \in \{1,\dots,r\}$:

$$\widetilde{u}_k(\widetilde{\sigma}^0) := \langle \widetilde{\sigma}^0, \widetilde{\alpha}_j\rangle - \langle \theta, \alpha_k\rangle \frac{\sum_{j=1}^r \beta_j\langle \widetilde{\sigma}^0, \widetilde{\alpha}_j\rangle}{\sum_{j=1}^r \langle \theta, \alpha_j\rangle}$$

qui est une forme linéaire en $\widetilde{\sigma}^0$,

on obtient :

$$f_{p,\rho,\beta}\left(\widetilde{\sigma}_1^0,\dots,\widetilde{\sigma}_{n-1}^0\right) = 1 + \sum_{k_0\in\mathcal{V}}\left(\sum_{\alpha_k\in[k_0]} a_k p^{-v_k}\right)p^{-\widetilde{u}_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)} \tag{2.44}$$

où les $\widetilde{u}_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)$ sont deux à deux distincts.

Lemme 7. *Quitte à perturber σ^0 de sorte que $\boldsymbol{s}^0 \in \partial W(0)\cap\mathcal{B}$, il existe p_0 tel que pour tout $\beta \notin B_e$, pour tout ρ tels que $\Re(t(\beta,\rho)) > 0$ et pour tout nombre premier $p > p_0$:*

$$h\left(p^{-s_1^0-t(\beta,\rho)\theta_1},\dots,p^{-s_n^0-t(\beta,\rho)\theta_n}\right) \neq 0.$$

Preuve. Le principe de la preuve consiste à ramener le problème à montrer l'assertion suivante :

Il existe $k_0 \in \mathcal{V}$ tel que $\displaystyle\sum_{\alpha_k\in[k_0]} a_k p^{-v_k} \neq 0$ pour p assez grand (i.e. $p > p_0$, où p_0 ne dépend pas de $\beta \notin B_e$ et ρ est tel que $\Re t(\beta,\rho) > 0$).

La raison pour laquelle ceci est utile est qu'il sera facile ensuite de vérifier que

$$f_{p,\rho,\beta} \neq 0 \quad p > p_0.$$

Notons pour tout $k \in \{1,\dots,r\}$:

$$\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k} := \alpha_k - \frac{\langle\theta,\alpha_k\rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}\sum_{j=1}^r \beta_j\alpha_j \text{ et } \mathcal{A}_{2,\beta,\theta,\rho,k} := \frac{\langle\theta,\alpha_k\rangle\rho}{\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}.$$

On note aussi $[k_0]'$ un ensemble de représentants des $\alpha_k \in [k_0]$ avec des $\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}$ deux à deux distincts.

Soit p un nombre premier.

On vérifie alors facilement que

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha_k\in[k_0]} a_k p^{-v_k} &= \sum_{\alpha_k\in[k_0]} a_k p^{-\mathcal{A}_{2,\beta,\theta,\rho,k}-i\ \langle\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k},\gamma^0\rangle} \\ &= \sum_{\alpha_k\in[k_0]'}\left(\sum_{\alpha_{k'}\in[k_0];\ \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'}=\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}} a_{k'}p^{w_{k,k',\theta,\beta,\rho}}\right)p^{-\mathcal{A}_{2,\beta,\theta,\rho,k}}p^{-i\ \langle\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k},\gamma^0\rangle};\end{aligned} \tag{2.45}$$

où

$$w_{k,k',\theta,\beta,\rho} = \frac{\langle\theta,\alpha_k-\alpha_{k'}\rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}\rho.$$

Supposons dans un premier temps qu'il existe $\alpha_k \in [k_0]'$ tel que

$$\sum_{\alpha_{k'}\in[k_0];\ \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'}=\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}} a_{k'}p^{w_{k,k',\theta,\beta,\rho}} \neq 0.$$

On fixe $\phi \in \mathbf{R}^n$ convenablement de sorte que les $\langle\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k},\phi\rangle$ (pour $\alpha_k \in [k_0]'$) soient deux à deux distincts et on pose $\gamma^0 := x.\phi$ de façon à considérer (2.45) comme une expression dépendant de la variable réelle x (perturbant ainsi génériquement γ^0).

Maintenant, si par l'absurde $\sum_{\alpha_k\in[k_0]} a_k p^{-v_k} = 0$ (i.e. si l'expression (2.45) est identiquement nulle en x), on obtiendrait en dérivant $\#[k_0]'$ fois par rapport à x que la matrice Vandermonde associée aux puissances $(i\langle\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k},\phi\rangle\log(p))^\nu$ (pour $k \in [k_0]'$ et $\nu = 0,1,\ldots,\#[k_0]'$) aurait un noyau non trivial.

De façon précise, considérons la matrice de Vandermonde $M = (a_{\alpha_k,j})_{\substack{\alpha_k\in[k_0]'\\ 1\le j\le\#[k_0]'}}$ où

$$a_{\alpha_k,j} := (i\langle\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k},\phi\rangle\log(p))^j\,.$$

Si on pose :

$$V = \left(V_{k_1},\ldots,V_{k_{\#[k_0]'}}\right) \text{ où :}$$

$$\forall k_i \in [k_0]', V_{k_i} := p^{-\mathcal{A}_{2,\beta,\theta,\rho,k_i}-ix\langle\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k_i},\phi\rangle}\sum_{\alpha_{k'}\in[k_0];\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'}=\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k_i}} a_{k'}p^{w_{k_i,k',\theta,\beta,\rho}};$$

on aurait :

$$M \cdot V = \mathbf{0}.$$

Et s'il existe $k \in [k_0]$ tel que $\displaystyle\sum_{\alpha_{k'} \in [k_0]; \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'} = \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}} a_{k'} p^{w_{k,k',\theta,\beta,\rho}} \neq 0$, on aurait également $p^{-\mathcal{A}_{2,\beta,\theta,k} - ix\langle \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}, \phi\rangle} \displaystyle\sum_{\alpha_{k'} \in [k_0]; \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'} = \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}} a_{k'} p^{w_{k,k',\theta,\beta,\rho}} \neq 0$ et par conséquent V serait non nul et le noyau de M (qui est une matrice de Vandermonde de déterminant non nul puisque les $\langle \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}, \phi\rangle$ sont deux à deux distincts) serait non trivial ; ce qui est impossible.

Par conséquent, les p tels que $\sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k} = 0$ sont nécessairement ceux qui vérifient :

$$\sum_{\alpha_{k'} \in [k_0];\ \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'} = \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}} a_{k'} p^{w_{k,k',\theta,\beta,\rho}} = 0 \tag{2.46}$$

pour tous les $\alpha_k \in [k_0]'$.

Remarquons également que si $\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'} = \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}$ alors

$$\alpha_k - \alpha_{k'} = \frac{\langle \theta, \alpha_k - \alpha_{k'}\rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta, \alpha_j\rangle} \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j;$$

et en prenant le produit scalaire avec σ^0 on obtient :

$$\langle \sigma^0, \alpha_k - \alpha_{k'}\rangle = \frac{\langle \theta, \alpha_k - \alpha_{k'}\rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta, \alpha_j\rangle} \sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j\rangle.$$

On a donc puisque $\sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j\rangle \neq 0$ (car $\beta \notin B_e$) :

$$w_{k,k',\theta,\beta,\rho} = \rho \frac{\langle \sigma^0, \alpha_k - \alpha_{k'}\rangle}{\sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j\rangle}. \tag{2.47}$$

Il est important de noter que bien que l'ensemble des $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ tels que $\gamma(\beta) \neq 0$ soit infini, l'ensemble

$$E := \{\beta_j \mid j \notin \Lambda_e, \gamma(\beta) \neq 0, \Re(t(\beta, \rho)) \geq 0\} \tag{2.48}$$

est fini.

En effet, puisque les $t(\beta, \rho)$ qui pourraient compenser les zéros $t_{m,p}$ sont nécessairement de partie réelle positive, on a

$$\Re(t(\beta, \rho)) = \frac{\Re(\rho) - \sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j\rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta, \alpha_j\rangle} \geq 0; \tag{2.49}$$

et par conséquent

$$\sum_{j\notin\Lambda_e}\beta_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle\leq\Re(\rho)<1;$$

ce qui donne que (2.48) est un ensemble fini puisque pour tout $j\notin\Lambda_e$, $\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle>0$.

Si maintenant p est un nombre premier vérifiant (2.46), alors $p^{\overline{\sum_{j\notin\Lambda_e}\beta_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}^{\rho}}$ est solution de

$$\sum_{\alpha_{k'}\in[k_0];\ \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'}=\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}} a_{k'}X^{\langle\sigma^0,\alpha_k-\alpha_{k'}\rangle}=0. \tag{2.50}$$

Il est clair que ces équations, en nombre fini, n'ont pas de solution pour $|X|$ assez grand ($|X|>M(\sigma^0)$) puisque les $\langle\sigma^0,\alpha'_k\rangle$ ($\alpha_{k'}\in[k_0]$; $\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'}=\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}$) sont deux à deux distincts.

En effet, si $\langle\sigma^0,\alpha_{k'}\rangle=\langle\sigma^0,\alpha_{k''}\rangle$ on aurait alors

$$\begin{cases}\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'}=\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k''}\\ \mathcal{A}_{2,\beta,\theta,k'}=\mathcal{A}_{2,\beta,\theta,k''}\ \text{puisque}\ w_{k,k',\theta,\beta,\rho}=w_{k,k'',\theta,\beta,\rho}\ \text{d'après (2.47).}\end{cases}$$

D'où

$$\rho\ \alpha_{k'}=\rho\ \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'}+\sum_{j=1}^{r}\beta_j\alpha_j\ \mathcal{A}_{2,\beta,\theta,k'}=\rho\ \alpha_{k''};$$

et donc $\alpha_{k'}=\alpha_{k''}$.

De plus, la constante précédente $M(\sigma^0)$ (qui dépend a priori de σ^0) ne dépend en fait que du compact $\mathcal{K}$ où se trouve σ^0 puisque tous les $\langle\sigma^0,\alpha_k-\alpha_{k'}\rangle$ sont bornés dans $\mathcal{K}$ et il est donc possible de choisir $M=M(\mathcal{K})$ de sorte que (2.50) n'ait pas de solution pour $|X|>M(\mathcal{K})$.

D'autre part, on dispose d'une minoration pour $\Re(\rho)$.

En effet puisque $\Re(t(\beta,\rho))\geq 0$, on a d'après (2.49)

$$\Re(\rho)\geq\min_{j\notin\Lambda_e}\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle>0.$$

Notons également le fait que cette minoration est absolue (i.e. ne dépend pas de σ^0) puisque même si on perturbe σ^0, il reste toujours dans le compact $\mathcal{K}$.

Ainsi il existe une constante absolue p_0 telle que pour $p>p_0=p_0(\mathcal{K})$:

$$\left|p^{\overline{\sum_{j\notin\Lambda_e}\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}^{\rho}}\right|\geq\exp\left(\log(p)\frac{\min_{j\notin\Lambda_e}\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}{\max_{\beta_j\in E}\beta_j\sum_{j\notin\Lambda_e}\langle\theta,\alpha_j\rangle}\right)>M(\mathcal{K}).$$

Donc si $p>p_0$

$$A_{k_0}(p):=\sum_{\alpha_k\in[k_0]}a_kp^{-v_k}\neq 0.$$

Montrons maintenant que $f_{p,\rho,\beta}\left(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0\right)$ est non identiquement nulle pour $p > p_0$.

Et pour cela il suffit de considérer $\mu \in \mathbf{R}^{n-1}$, par exemple de composantes $\mathbf{Q}$-linéairement indépendantes, de sorte que les $\widetilde{u}_{k_0}(\mu)$ soient deux à deux distincts pour $k_0 \in \mathcal{V}$.

On pose ensuite :

$$\widetilde{\sigma}^0 = t\mu.$$

Alors puisque $\widetilde{u}_{k_0}(t\mu) = t\ \widetilde{u}_{k_0}(\mu)$ on a :

$$f_{p,\rho,\beta}(t\mu) = 1 + \sum_{k_0 \in \mathcal{V}} A_{k_0}(p) \exp\left(-t \log(p) \widetilde{u}_{k_0}(\mu)\right).$$

En utilisant maintenant le fait que les fonctions $\{t \longmapsto \exp\left(-t \log(p) \widetilde{u}_{k_0}(\mu)\right)\}_{k_0 \in \mathcal{V}}$ sont linéairement indépendantes puisque les $\widetilde{u}_{k_0}(\mu) \in \mathbf{R}$ sont deux à deux distincts, il est clair que $f_{p,\rho,\beta}(t\mu)$ est non nulle, et donc que $f_{p,\rho,\beta}\left(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0\right)$ est non nulle pour $p > p_0$.

On utilise alors le lemme 3 pour en déduire que pour $p > p_0$, ρ et $\beta \notin B_e$ fixés, les zéros de $\widetilde{\sigma}^0 \longmapsto f_{p,\rho,\beta}(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$ sont donnés par une réunion finie d'hypersurfaces de dimension au plus $n-2$; et sont par conséquent d'intérieur vide dans $\mathbf{R}^{n-1}$.

Soit alors :

$$M = \bigcup_{\beta \notin B_e, p > p_0, \rho | \zeta(\rho) = 0} f_{p,\rho,\beta}^{-1}(0).$$

M, en tant que réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide dans $\partial W(0) \cap \mathcal{B} \cap \mathbf{R}^n$, est également d'intérieur vide dans $\partial W(0) \cap \mathcal{B} \cap \mathbf{R}^n$ d'après le théorème de Baire.

Pour conclure il suffit de choisir $\mathbf{s}^0 \in \partial W(0) \cap \mathcal{B}$ tel que $\sigma^0 \in \partial W(0) \cap \mathcal{B} \cap \mathbf{R}^n \setminus M$ pour avoir une accumulation de zéros de $Z(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ dans $\Xi_{u,\eta}$, ce qui termine la preuve de ce lemme.

□

Pour résumer, on a vu dans la preuve du lemme 7, que lorsque $\beta \notin B_e$ il existe au moins un $k_0 \in \mathcal{V}$ tel que $\displaystyle\sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k} \neq 0$, ce qui permet d'avoir $f_{p,\rho,\beta}\left(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0\right) \neq 0$ quitte à perturber σ^0 en évitant un nombre dénombrable d'hypersurfaces de dimension au plus $n-2$.

Examinons maintenant les $t(\beta, \rho)$ avec $\beta \in B_e$.

Considérons pour tout $1 > \delta > 0$ la région $\Xi_{u,\eta}^\delta$ déterminée par :

$$\Xi_{u,\eta}^\delta : \quad \begin{array}{l} \Re(t) > \delta \\ 0 < u < \Im(t) < u + \eta. \end{array}$$

Enonçons finalement le dernier lemme pour compléter la démonstration du théorème principal 8 :

Lemme 8. *Quitte à perturber σ^0 de sorte que $s^0 \in \partial W(0) \cap \mathcal{B}$, il y a dans $\Xi^{\delta}_{u,\eta}$ (à mesure que $\delta \longrightarrow 0$) des zéros $t_{m,p}$ provenant de $W^p_{\boldsymbol{s}^0,\theta}(p^{-1}, p^{-t})$ qui ne sont pas des singularités des facteurs ζ de A_{M_δ} correspondant aux $\beta \in B_e$.*

Il existe en particulier une infinité de zéros de $Z(\boldsymbol{s}^0 + t\theta)$ dans $\Xi_{u,\eta}$ qui ne sont pas compensés.

Preuve. Reprenons l'écriture (2.44) de $f_{p,\rho,\beta}$:

$$f_{p,\rho,\beta}\left(\widetilde{\sigma}^0_1, \ldots, \widetilde{\sigma}^0_{n-1}\right) = 1 + \sum_{k_0 \in \mathcal{V}} \left(\sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k} \right) p^{-\widetilde{u}_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)}$$

où les $\widetilde{u}_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)$ sont deux à deux distincts.

S'il existe un $k_0 \in \mathcal{V}$ tel que $\sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k} \neq 0$, on procède exactement comme dans le lemme 7 pour avoir $f_{p,\rho,\beta}\left(\widetilde{\sigma}^0_1, \ldots, \widetilde{\sigma}^0_{n-1}\right) \neq 0$ quitte à perturber σ^0.

Supposons donc que pour tout $k_0 \in \mathcal{V}$ $\sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k} = 0$.

D'après la remarque 8, on peut décrire précisément $\sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k}$:

$$\sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k} = \sum_{\alpha_k | \alpha_k - \alpha_{k_0} \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_k p^{-\frac{\langle \theta, \alpha_k \rangle \rho}{\sum_{j \in \Lambda_e} \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle} - i\left(\langle \gamma^0, \alpha_k \rangle - \langle \theta, \alpha_k \rangle \frac{\sum_{j \in \Lambda_e} \beta_j \langle \gamma^0, \alpha_j \rangle}{\sum_{j \in \Lambda_e} \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle} \right)}.$$

En écrivant pour $j \in \Lambda_e$ $\alpha_j = q_j \alpha_e$ ($q_j \in \mathbf{Q}$), on a

$$\langle \gamma^0, \alpha_k \rangle - \langle \theta, \alpha_k \rangle \frac{\sum_{j \in \Lambda_e} \beta_j \langle \gamma^0, \alpha_j \rangle}{\sum_{j \in \Lambda_e} \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle} = \langle \gamma^0, \alpha_k \rangle - \langle \theta, \alpha_k \rangle \frac{\langle \gamma^0, \alpha_e \rangle}{\langle \theta, \alpha_e \rangle}.$$

Et par conséquent pour tout $k_0 \in \mathcal{V}$ $\sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k} = 0$ équivaut à :

$$\sum_{\alpha_k | \alpha_k - \alpha_{k_0} \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_k p^{-i\langle \gamma^0, \alpha_k \rangle} p^{-\langle \theta, \alpha_k \rangle \left(\frac{\rho}{\sum_{j \in \Lambda_e} \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle} - i \frac{\langle \gamma^0, \alpha_e \rangle}{\langle \theta, \alpha_e \rangle} \right)} = 0;$$

ce qui revient à dire que $p^{-\frac{\rho}{\sum_{j \in \Lambda_e} \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle} + i \frac{\langle \gamma^0, \alpha_e \rangle}{\langle \theta, \alpha_e \rangle}}$ est une racine des polynômes généralisés

$$\sum_{\alpha_k | \alpha_k - \alpha_{k_0} \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_k p^{-i\langle \gamma^0, \alpha_k \rangle} Y^{\langle \theta, \alpha_k \rangle}$$

pour tout $k_0 \in \mathcal{V}$.

Et puisque

$$\begin{aligned} W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y) &= \sum_{k_0\in\mathcal{V}} \sum_{\alpha_k|\alpha_k-\alpha_{k_0}\in\mathbf{Q}\alpha_e} a_k p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_k\rangle} X^{\langle\sigma^0,\alpha_k\rangle} Y^{\langle\theta,\alpha_k\rangle} \\ &= \sum_{k_0\in\mathcal{V}} X^{\langle\sigma^0,\alpha_{k_0}\rangle} \sum_{\alpha_k|\alpha_k-\alpha_{k_0}\in\mathbf{Q}\alpha_e} a_k p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_k\rangle} Y^{\langle\theta,\alpha_k\rangle}; \end{aligned}$$

on obtient alors que $Y = p^{-\frac{\rho}{\sum_{j\in\Lambda_e}\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}+i\frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}}$ est une racine de $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ pour tout X.

De plus cette racine est de module strictement inférieur à 1.

En effet

$$\left|p^{-\frac{\rho}{\sum_{j\in\Lambda_e}\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}+i\frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}}\right| = \exp\left(-\frac{\Re(\rho)}{\sum_{j\in\Lambda_e}\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}\log(p)\right) < 1$$

car $\Re(\rho) > 0$.

En reprenant les notations précédentes, on obtient donc qu'il existe une branche de Puiseux réduite à un terme (i.e. une racine) $\Omega^p_k = c^p_{k,0}$ de module strictement inférieur à 1 (qui ne dépend pas de p d'après (2.32)) vérifiant $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,\Omega^p_k) = 0$.

Nous allons maintenant montrer que cette branche fournit beaucoup de zéros de $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(p^{-1},p^{-t})$ dans $\Xi^\delta_{u,\eta}$, beaucoup plus que les éventuels pôles provenant de A_{M_δ} lorsque $\delta \longrightarrow 0$, de façon à assurer l'accumulation de zéros de $Z(\mathbf{s}^0+t\theta)$ dans $\Xi_{u,\eta}$.

Les zéros $t_{m,p}$ produits par Ω^p_k (de partie réelle strictement positive) sont de la forme

$$t_{m,p} = -\frac{\log(c^p_{k,0})}{\log(p)} + \frac{2i\pi m}{\log(p)};$$

où $m \in \mathbf{Z}$ et p est un nombre premier.

Les $t_{m,p} \in \Xi^\delta_{u,\eta}$ sont tels que $\Re(t_{m,p}) > \delta$ et $u < \Im(t_{m,p}) < u+\eta$, c'est à dire tels que :

$$p < \exp\left(-\frac{\log|c^p_{k,0}|}{\delta}\right) \text{ et } \frac{u\log(p)}{2\pi} + \arg(c^p_{k,0}) < m < \frac{(u+\eta)\log(p)}{2\pi} + \arg(c^p_{k,0}).$$

D'autre part ces $t_{m,p}$ sont deux à deux distincts. En effet si $t_{m,p} = t_{m',p'}$ on obtient en prenant les parties réelles :

$$-\frac{\log|c^p_{k,0}|}{\log(p)} = -\frac{\log|c^{p'}_{k,0}|}{\log(p')};$$

et puisque $|c_{k,0}^{p}| = |c_{k,0}^{p'}|$ (voir (2.32)), on obtient $\log(p) = \log(p')$ et donc $p = p'$. Puis en comparant les parties imaginaires il vient que $m = m'$.

Par conséquent le nombre de tels $t_{m,p}$ (compté sans les multiplicités) dans $\Xi_{u,\eta}^{\delta}$ est donné par

$$N_{\Omega_k^p} = \sum_{p<\exp\left(-\frac{\log|c_{k,0}^p|}{\delta}\right)} \left(\frac{\eta\log(p)}{2\pi} + \xi\right)$$

où $|\xi| \leq 1$.

Et en utilisant le théorème des nombres premiers

$$\sum_{p\leq x} \log(p) \sim x \quad (x \longrightarrow \infty)$$

$$\sum_{p\leq x} \xi = O(\pi(x)) = o(x) \quad (x \longrightarrow \infty);$$

on obtient :

$$N_{\Omega_k^p} \sim \frac{\eta}{2\pi} \exp\left(-\frac{\log|c_{k,0}|}{\delta}\right) \quad (\delta \longrightarrow 0).$$

Estimons d'un autre côté le nombre (compté sans multiplicité) de possibles pôles provenant de A_{M_δ}.

Si t_0 est un zéro ou une singularité de $A_{M_\delta}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ dans $\Xi_{u,\eta}^{\delta}$, il existe alors $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que $\sum_{j=1}^{r} \beta_j \left(\langle \mathbf{s}^0, \alpha_j\rangle + t_0\langle\theta, \alpha_j\rangle\right)$ est un zéro ou un pôle de $\zeta(\cdot)$; et cette quantité satisfait nécessairement :

$$\Re(t_0) \sum_{j=1}^{r} \beta_j\langle\theta, \alpha_j\rangle \leq \Re\left(\sum_{j=1}^{r} \beta_j \left(\langle \mathbf{s}^0, \alpha_j\rangle + t_0\langle\theta, \alpha_j\rangle\right)\right) \leq 1;$$

Et par conséquent :

$$\delta < \Re(t_0) \leq \frac{1}{\sum_{j=1}^{r} \beta_j\langle\theta, \alpha_j\rangle};$$

ce qui donne :

$$\sum_{j=1}^{r} \beta_j\langle\theta, \alpha_j\rangle < \frac{1}{\delta}.$$

Mais puisque $\langle\theta, \alpha_j\rangle > 0$ pour tout j il existe une constante $C_\theta > 0$ (qui ne dépend que de θ) telle que

$$\sum_{j=1}^{r} \beta_j\langle\theta, \alpha_j\rangle \geq C_\theta \; \|\beta\|.$$

Donc

$$\|\beta\| \leq \frac{1}{C_\theta}\,\frac{1}{\delta}. \tag{2.51}$$

De plus,

$$\Im\left(t_0\right) < u+\eta$$

donne :

$$\Im\left(\sum_{j=1}^{r}\beta_j\left(\langle \mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle + t_0\langle\theta,\alpha_j\rangle\right)\right) = O\left(\frac{u+\eta}{\delta}\right).$$

Ayant fixé $\eta>0$, le nombre de zéros ou singularités d'un ζ-facteur de $A_{M_\delta}\left(\mathbf{s}^0+t\theta\right)$ est donné par :

$$O\left(\frac{1}{\delta}\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right),$$

compte-tenu d'un résultat classique concernant l'estimation du nombre de zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann ayant leur partie imaginaire inférieure ou égale à $\frac{1}{\delta}$. De plus, Le même zéro ou la même singularité peut, d'après (2.51), apparaître dans au plus $\left(\frac{1}{\delta}\right)^r$ termes ; ce qui donne au plus :

$$O\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^{r+1}\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)$$

zéros ou pôles provenant de $A_{M_\delta}\left(\mathbf{s}^0+t\theta\right)$ dans $\Xi_{u,\eta}^{\delta}$ (comptés sans leur multiplicités).

Cette estimation est donc négligeable devant $N_{\Omega_k^p}$, ce qui achève la preuve de ce lemme et termine la preuve du théorème principal 8.

□

Remarque 9. On vient de voir que l'on peut supposer, quitte à perturber σ^0, que pour tout $\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}$ et tout zéro ou pôle de ζ

$$h\left(p^{-s_1^0-t(\beta,\rho)\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t(\beta,\rho)\theta_n}\right)\neq 0,$$

sauf s'il existe éventuellement une racine en Y pour tout X de $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ de module strictement inférieure à 1.

Cela signifie alors qu'il existe un polynôme d'une variable en Y qui divise $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$. Et en réutilisant les arguments présentés dans le lemme 4, cela entraîne qu'un certain polynôme divise h.

Si donc h est un polynôme irréductible, aucun $t(\beta,\rho)$ ($\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}$) n'annule $t\longmapsto h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n}\right)$ quitte à perturber σ^0.

Chapitre 3

Etude sur les éventuels prolongements de dimension strictement inférieure au-delà de $\partial W(0)$ et application vers la conjecture 1.

Débutons cette partie par l'exemple suivant donné par N. Kurokawa [20] :
On pose

$$h(X_1, X_2, X_3) = 1 - X_1X_2 - X_2X_3 - X_3X_1 + 2X_1X_2X_3;$$

et le produit eulérien correspondant :

$$Z(s_1, s_2, s_3) = \prod_p \left(1 - p^{-s_1-s_2} - p^{-s_2-s_3} - p^{-s_3-s_1} + 2p^{-s_1-s_2-s_3}\right).$$

On a ici :

$$W(0) = \{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbf{C}^3 \mid \sigma_1 + \sigma_2 > 0, \sigma_2 + \sigma_3 > 0, \sigma_3 + \sigma_1 > 0\}.$$

Le polynôme h n'est pas cyclotomique ; en effet on a :

$$h(X_1, X_1, X_1) = (1 + X_1)^2(1 - 2X_1);$$

et $(1 - 2X_1)$ n'est clairement pas cyclotomique.
D'après les résultats précédents, on sait que Z se prolonge de façon méromorphe jusque $W(0)$ et qu'il n'existe pas de prolongement méromorphe à toute boule ouverte de dimension complexe 3 au-delà de tout point de $\partial W(0)$.

Cependant,

$$Z(s_1, s_2, 0) = \prod_p \left(1 - p^{-s_1}\right)\left(1 - p^{-s_2}\right) = \frac{1}{\zeta(s_1)\zeta(s_2)};$$

$Z(s_1, s_2, 0)$ est donc méromorphe sur tout $\mathbf{C}^2$: il y a ici un prolongement méromorphe sur une hypersurface complexe au-delà du point $\mathbf{0} \in \partial W(0)$. Cet exemple montre que le théorème 8 est optimal du point de vue de la dimension complexe d'un éventuel prolongement méromorphe au-delà de $\partial W(0)$.

3.1 Sur la méromorphie de $Z(\mathbf{s})$ sur le bord $\partial W(0)$.

On veut préciser dans certains cas le comportement de $Z(\mathbf{s})$ (si h n'est bien sûr pas cyclotomique) sur la frontière $\partial W(0)$.

On considère ici un point $\mathbf{s}^0 \in \partial W(0) \cap \mathbf{R}^n$ qui satisfait la condition $(A.13)$.

Définition 15. Etant donné $a \in \mathbf{R}$ et $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{C}$, on écrit :

$$\Re(t) >_{\mathcal{P}} a = \{t \in \mathbf{C} \mid \Re(t) > a\} \setminus \bigcup_{\rho \in \mathcal{P}} (\rho +]-\infty, 0]) \,;$$

le demi-plan $\Re(t) > a$ privé d'un système de demi-droites à gauche horizontales déterminées par les points de $\mathcal{P}$.

Si $m \geq 1$ et si J est un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}^*$, on pose également :

$$\begin{aligned}\partial_J(m) &= \left\{t \in \mathbf{C} \mid \Re(t) > -1, \text{il existe } \beta \in \mathbf{N}^{\# J}, \|\beta\| = m, \zeta\left(\sum_{j \in J} \beta_j \langle \mathbf{s}^0, \alpha_j \rangle (1+t)\right) = 0\right\} \\ &\bigcup_{\beta \in \mathbf{N}^{\# J}, \|\beta\| = m} \left\{-1 + \frac{1}{\sum_{j \in J} \beta_j \langle \mathbf{s}^0, \alpha_j \rangle}\right\}.\end{aligned}$$

Remarque 10. Le lecteur pourra consulter [28] (chapitre 4 p. 131) dans lequel il est prouvé que l'ensemble $\Re(t) >_{\mathcal{P}} a$ est un ouvert simplement connexe si les conditions suivantes ont lieu :

1. Les parties imaginaires des éléments de $\mathcal{P}$ n'admettent pas de point d'accumulation sur l'axe réel ;
2. Les parties réelles des éléments de $\mathcal{P}$ sont bornées supérieurement.

Le but de cette section est de montrer le résultat suivant :

Théorème 9. *On suppose que*

$$[h]_e(\boldsymbol{X}) = 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j \boldsymbol{X}^{\alpha_j}$$

est cyclotomique et vérifie $[h]_e(\boldsymbol{1}) \neq 0$.

Soit $J_0 = \{1,\ldots,r\} \setminus \Lambda_e$ *et écrivons :*

$$\partial_{J_0} = \bigcup_{m\geq 1} \partial_{J_0}(m).$$

Alors $t \longmapsto Z(\boldsymbol{s}^0(1+t))$ *admet un prolongement méromorphe jusque* $\Re(t) >_{\partial_{J_0}} -1$. *En particulier,* $t \longmapsto Z(\boldsymbol{s}^0(1+t))$ *se prolonge à une boule ouverte au-delà de presque tout point de l'axe* $\Re(t) = 0$ *(c'est à dire tous les points de* $\Re(t) = 0$ *excepté un ensemble dénombrable et isolé).*

Preuve. Ecrivons :

$$h(\mathbf{X}) = [h]_e(\mathbf{X}) \left(1 + \frac{\sum_{j\in J_0} a_j \mathbf{X}^{\alpha_j}}{[h]_e(\mathbf{X})}\right).$$

Puisque $[h]_e(\mathbf{X})$ est cyclotomique ici, le domaine de méromorphie du produit eulérien :

$$Z(\mathbf{s}) = \prod_p h(p^{-s_1},\ldots,p^{-s_n})$$

demeure inchangé si on considère :

$$\widetilde{Z}(\mathbf{s}) = \prod_p \left(1 + \frac{\sum_{j\in J_0} a_j p^{-\langle \mathbf{s},\alpha_j\rangle}}{[h]_e(p^{-s_1},\ldots,p^{-s_n})}\right).$$

Notons que pour tout nombre premier p :

$$[h]_e(p^{-s_1^0(1+t)},\ldots,p^{-s_n^0(1+t)}) = 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j p^{-\langle \mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle(1+t)} = [h]_e(\mathbf{1});$$

et ne dépend donc pas de p.

On obtient ainsi :

$$\widetilde{Z}(\mathbf{s}^0(1+t)) = \prod_p \left(1 + \sum_{j\in J_0} \frac{a_j}{[h]_e(\mathbf{1})} p^{-\langle \mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle(1+t)}\right). \tag{3.1}$$

Soit maintenant $\delta > 0$ et m_δ l'entier tel que pour tout $\beta \in \mathbf{N}^{\#J_0}$ satisfaisant $\|\beta\| \geq m_\delta$ on a $\displaystyle\sum_{j\in J_0} \beta_j \langle \mathbf{s}^0, \alpha_j\rangle > \frac{1}{\delta}$, et écrivons :

$$\partial_{J_0}^\delta = \bigcup_{m=1}^{m_\delta} \partial_{J_0}(m).$$

Montrons que $t \longmapsto \widetilde{Z}(\mathbf{s}^0(1+t))$ se prolonge de façon méromorphe jusque $\Re(t) >_{\partial^\delta_{J_0}} -1+\delta$.

Et pour cela, on désire utiliser le théorème 6 page 28 ; mais ici le polynôme qui apparaît dans (3.1) possède a priori des coefficients rationnels.

D'après le théorème 6, on a :

$$\widetilde{Z}\left(\mathbf{s}^0(1+t)\right) = \prod_{\substack{\beta\in\mathbf{N}^{\# J_0}\\ 1\leq\|\beta\|\leq m_\delta}} \zeta\left(\sum_{j\in J_0}\beta_j\langle\mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle(1+t)\right)^{\gamma(\beta)} G_{m_\delta^{-1}}\left(\mathbf{s}^0(1+t)\right);$$

où $G_{m_\delta^{-1}}$ est holomorphe pour $\Re(t) > -1+\delta$.

Il faut noter (voir [2]) que les $\gamma(\beta)$ peuvent être calculé de façon explicite par récurrence sur $\|\beta\|$ et que l'on montre sans difficulté que si le polynôme de départ est à coefficients rationnels, alors tous les $\gamma(\beta)$ sont rationnels également.

De plus, puisque les $\gamma(\beta) \in \mathbf{Q}$ et par conséquent il est nécessaire de pouvoir définir un logarithme, un facteur de la forme $\zeta\left(\sum_{j\in J_0}\beta_j\langle\mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle(1+t)\right)^{\gamma(\beta)}$ pour $\|\beta\| \leq m_\delta$ est une fonction holomorphe dans tout domaine simplement connexe ne contenant ni zéro ni pôle de la fonction $\zeta\left(\sum_{j\in J_0}\beta_j\langle\mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle(1+t)\right)$; et c'est en particulier le cas pour $\Re(t) >_{\partial^\delta_{J_0}} -1+\delta$.

Notons pour finir que $\partial^\delta_{J_0}$ est un ensemble dénombrable et isolé puisqu'il s'agit d'une réunion finie de $\partial_{J_0}(m)$ pour $m \leq m_\delta$; ce qui termine la preuve du théorème.

□

3.2 Sur l'existence d'un prolongement sur une hypersurface réelle au-delà de $\partial W(0)$.

Précédemment on a pu observer que le théorème 8 était optimal du point de vue de la dimension complexe : la frontière naturelle, lorsqu'elle existe, n'a de sens que pour les prolongements méromorphes de dimension complexe maximale ; et comme on a pu le constater avec l'exemple au début de cette section, il est possible qu'il existe un prolongement méromorphe au-delà de $\partial W(0)$ en dimension complexe inférieure.

Ainsi, on ne peut pas espérer donner un sens au concept de frontière naturelle en toute généralité si l'on descend ne serait-ce que d'une dimension complexe.

Cependant, il est légitime de se poser la question s'il est possible d'améliorer les résultats précédents en descendant seulement d'une dimension réelle ; en d'autres termes, s'il existe ou non un prolongement sur une hypersurface réelle au-delà de

$\partial W(0)$ dans un sens qui doit être précisé puisqu'a priori sur une telle hypersurface la notion d'holomorphie n'a pas de sens.

Et pour cela on fera appel à la théorie des fonctions C-R (Cauchy-Riemann) sur une hypersurface réelle qui généralise la classe des fonctions holomorphes.

Pour commencer, voici un résultat qui sera utile pour la suite :

Proposition 3 ([22])**.** *Soit D une boule ouverte connexe de $\mathbf{C}^n$ et f et g des fonctions analytiques sur D.*

Si f coïncide avec g sur une partie S de D pour laquelle il existe un ouvert connexe V de D tel que $V \setminus S$ n'est pas connexe, alors f coïncide avec g sur D.

En particulier, ce résultat est vrai si S est une hypersurface réelle de D.

Le lecteur trouvera une preuve dans [22] page 15.

Rappelons que si $\mathcal{X}$ est une variété analytique complexe de dimension n et si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{X}$, pour tout $x \in \mathcal{X}$ on a :

$$\begin{aligned}(df)_x &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i}(x)(dz_i)_x + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i}(x)(d\overline{z}_i)_x \\ &= \partial f_x + \overline{\partial} f_x;\end{aligned}$$

On dit alors que ∂f (respectivement $\overline{\partial} f$) est une 1-forme différentielle de type $(1,0)$ (respectivement de type $(0,1)$) ; et f est holomorphe sur $\mathcal{X}$ si et seulement si $\overline{\partial} f_x = 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

Définition 16. On dit qu'une $(p_1 + p_2)$-forme différentielle ω $\mathcal{C}^\infty$ sur un domaine de carte U de $\mathcal{X}$ est de bidegré (p_1, p_2) si elle admet l'écriture unique suivante :

$$\omega = \sum_{\substack{|I|=p_1 \\ |J|=p_2}} c_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J;$$

où les $c_{I,J}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U, la somme portant sur les multi-indices $I = (i_1, \dots, i_{p_1})$ et $J = (j_1, \dots, j_{p_2})$ strictement croissants et

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{p_1}} \text{ (resp. } d\overline{z}_J = d\overline{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}_{j_{p_2}}).$$

Définition 17. Si

$$\omega = \sum_{\substack{|I|=p_1 \\ |J|=p_2}} c_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J;$$

on pose :

$$\overline{\partial}\omega = \sum_{\substack{|I|=p_1 \\ |J|=p_2}} \overline{\partial}(c_{I,J}) dz_I \wedge d\overline{z}_J = \sum_{\substack{|I|=p_1 \\ |J|=p_2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial c_{I,J}}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$

$\overline{\partial}\omega$ est donc une forme différentielle de bidegré (p_1, p_2+1).

On peut maintenant définir ce qu'est une fonction C-R sur une hypersurface réelle :

Définition 18. Une fonction f continue sur une hypersurface réelle M de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbf{C}^n$ est dite C-R (Cauchy-Riemann) si pour toute forme différentielle ω de bidegré $(n, n-2)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de M et telle que supp $\omega \cap M$ est compact, on a :

$$\int_M f\overline{\partial}\omega = 0.$$

Exemple 2. Si F est une fonction holomorphe dans un voisinage de M, alors $f = F\mid_M$ est C-R sur M. Soit en effet ω une forme différentielle de bidegré $(n, n-2)$ satisfaisant les conditions de la définition précédente et soit D un domaine borné dont le bord est $\mathcal{C}^1$ par morceaux contenu dans les domaines de définitions de F et de ω, tel que $\partial D \cap M \supset$ supp $\omega \cap M$ et tel que l'orientation sur M coincide avec celle de ∂D. Alors :

$$\begin{array}{rcll}
\int_M f\overline{\partial}\omega & = & \int_{\partial D} F\overline{\partial}\omega & \text{par définition de } D \text{ et car } f = F\mid_M \\
& = & \int_{\partial D} \overline{\partial}(F\omega) & \text{car } F \text{ est holomorphe} \\
& = & \int_{\partial D} d(F\omega) & \text{car } \partial(F\omega) = 0 \text{ puisque } \omega \text{ est de bidegré } (n, n-2) \\
& = & \int_D d\left(d(F\omega)\right) = 0 & \text{d'après la formule de Stokes.}
\end{array}$$

Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur M, il existe une définition équivalente à la définition 18 (le lecteur trouvera une preuve de cette équivalence dans [22]) :

Définition 19. Si M est définie par $\{z \in U \mid r(z) = 0\}$, où U est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et r une fonction $\mathcal{C}^1$ de U vers $\mathbf{R}$ telle que $dr(z) \neq 0$ si $z \in U$, la fonction $f \in \mathcal{C}^1(M)$ est C-R si et seulement si pour tout $v \in M$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i}(v) = 0,$$

pour tout $t \in \mathbf{C}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_i}(v)\overline{t}_i = 0$.

Formulons maintenant un résultat fondamental concernant les fonctions C-R qui va nous intéresser tout particulièrement dans la suite et dont on pourra trouver une preuve dans [26] :

Proposition 4. *Soit M une hypersurface analytique réelle dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$, et $f : M \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction C-R analytique réelle.*

Alors, si $v \in M$, il existe un voisinage U de v et F une fonction holomorphe sur U telle que $F = f$ sur $U \cap M$.

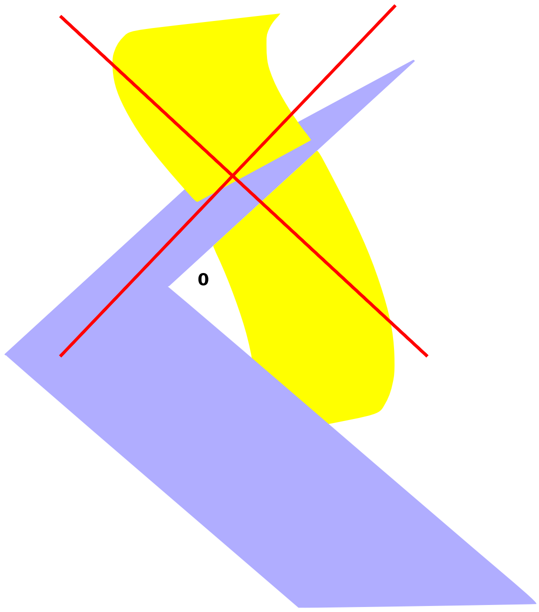

FIG. 3.1 – Illustration du théorème 10 pour $n = 3$ (projection dans l'espace des parties réelles).

Finalement, cette dernière proposition permet d'étendre le théorème 8 dans la plupart des cas si l'on descend seulement d'une dimension réelle :

Théorème 10. *On suppose toujours que le polynôme h n'est pas cyclotomique et que $\mathcal{F}(\alpha_e) \subseteq \partial W(0)$ est une face non dégénérée.*

Alors $\mathcal{F}(\alpha_e) \subseteq \partial W(0)$ est une frontière naturelle pour $Z(\boldsymbol{s})$ dans le sens qu'il n'existe pas de prolongement C-R analytique réel défini sur une hypersurface analytique réelle qui intersecte transversalement $\mathcal{F}(\alpha_e)$.

Preuve. Considérons une hypersurface analytique réelle M qui intersecte transversalement $\mathcal{F}(\alpha_e)$ et supposons par l'absurde que f est un prolongement de $Z(\mathbf{s})$ sur M dans un voisinage d'un point $\mathbf{s}^0 \in M \cap \mathcal{F}(\alpha_e)$. Posons de plus $S = M \cap W(0)$. Alors, d'après la proposition 4, il existe un voisinage $U \subset \mathbf{C}^n$ de $\mathbf{s}^0$ et F une fonction holomorphe sur U telle que $F = f$ sur $U \cap M$. Mais puisque f est un prolongement de $Z(\mathbf{s})$, on a également que $Z = f = F$ sur S.

Et d'après la proposition 3, on obtient que $Z = F$ sur $U \cap W(0) \neq \emptyset$.

Mais cela signifierait qu'il existe une boule ouverte $\mathcal{B} \subset U \subset \mathbf{C}^n$ centrée en $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e)$ telle que F prolonge Z à $\mathcal{B}$; ce qui est impossible conformément au théorème 8.

$\square$

3.3 Application vers la conjecture de Rudnick et du Sautoy.

Précisons le lien entre la conjecture 1 et le théorème précédent 8.

Ecrivons $h(X_1, X_2) = 1 + \sum_{j=1}^{r} \left(a_{j,0} + a_{j,1}X_1 + \cdots + a_{j,n_j}X_1^{n_j}\right) X_2^j \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ et supposons sans perte de généralité qu'il ne contient aucun facteur cyclotomique (on suppose biensûr que h n'est pas cyclotomique).

On pose :

$$S_1 = \max\left\{\frac{n_j+1}{j}, j \in \{1, \ldots, r\}\right\}; S_0 = \max\left\{\frac{n_j}{j}, j \in \{1, \ldots, r\}\right\}.$$

Et on considère le produit eulérien apparaissant dans la conjecture 1 :

$$Z(s) = \prod_{p \text{ premier}} h\left(p, p^{-s}\right).$$

On vérifie facilement que $Z(s)$ est holomorphe pour $\Re(s) > S_1$.

On introduit alors le produit eulérien de deux variables :

$$Z(s_1, s_2) = \prod_p h(p^{-s_1}, p^{-s_2}).$$

On sait que $Z(s_1, s_2)$ se prolonge de façon méromorphe à :

$$W(0) = \left\{(s_1, s_2) \in \mathbf{C}^2, \sigma_2 > -\frac{n_j}{j}\sigma_1, \forall j \in \{1, \ldots, r\}\right\}.$$

On remarque ici que $\partial W(0)$ se compose de deux hyperplans :

1. l'un d'équation $\sigma_2 = -S_0\sigma_1$ (pour $\sigma_1 \leq 0$) ;
2. l'autre d'équation $\sigma_2 = -\min\left(\frac{n_j}{j}\right)\sigma_1$ (pour $\sigma_1 \geq 0$).

Les seuls points $\mathbf{s}^0$ sur le bord de $W(0)$ se trouvant sur ces deux hyperplans sont tels que $\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = 0$.

Par conséquent si on choisit $\mathbf{s}^0 = (-1, S_0)$, il n'est pas nécessaire de le perturber pour avoir (A.3).

Et si on pose $\theta = (0, 1)$, on obtient :

$$Z(\mathbf{s}^0 + t\theta) = \prod_p h\left(p, p^{-S_0-t}\right).$$

Ainsi, dire que $\Re(s) = S_0$ est une frontière naturelle de $Z(s)$ équivaut à dire que l'on ne peut prolonger $Z(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ au-delà de $\Re(t) = 0$ pour la direction $\theta = (0, 1)$.

Mais d'après le théorème 8, on sait qu'il n'existe pas d prolongement méromorphe à toute boule ouverte $\mathcal{B}$ (de dimension complexe 2) centrée en s^0. De plus, on peut affirmer, dans la direction de la conjecture, le résultat suivant qui est une conséquence de la section précédente :

Corollaire 3.3.1. Il n'existe pas de prolongement C-R analytique réel défini sur une hypersurface analytique réelle qui intersecte transversalement $\partial W(0)$ en $\mathbf{s}^0$ si la face contenant $\mathbf{s}^0$ est non dégénérée. En particulier, il ne peut exister de prolongement C-R analytique réel défini sur une hypersurface analytique réelle qui contient la direction $\theta = (0, 1)$ de la conjecture.

Chapitre 4

Une première application en géométrie diophantienne.

Cette partie est essentiellement la reprise d'une application de [2], mais on utilisera ici les résultats précédents concernant la frontière naturelle des produits eulériens multivariables pour préciser le résultat obtenu dans [2] (voir le théorème 5 de [2]).

On s'intéresse aux propriétés analytiques de la série de Dirichlet de plusieurs variables dont les coefficients encodent l'appartenance au tore maximal d'une variété torique projective X.

On considère tout d'abord un plongement projectif déterminé par un ensemble de d monômes définissant des équations de n variables.

L'ensemble des exposants des monômes définissant X détermine une matrice $\mathbf{A}$ $d \times n$ à coefficients entiers, dont les colonnes $\mathbf{a}_j = (a_{j,1}, \ldots, a_{j,n})$ satisfont chacune la propriété :

$$\sum_i a_{j,i} = 0.$$

Les points rationnels de la variété sont définis de la façon suivante :

$$X(\mathbf{A}) = \left\{ (x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{Q}) : \prod_{\{i : a_{j,i} \geq 0\}} x_i^{a_{j,i}} = \prod_{\{i : a_{j,i} < 0\}} x_i^{-a_{j,i}} \ \forall j \right\};$$

et son tore maximal $U(\mathbf{A})$ est :

$$U(\mathbf{A}) = \{(x_1 : \ldots : x_n) \in X(\mathbf{A}) : x_1 \cdots x_n \neq 0\}.$$

A chaque point $\mathbf{x} \in U(\mathbf{A})$, on peut multiplier les coordonnées x_i par un entier convenable de façon à obtenir deux n-uplet d'entiers correspondant opposés (avec des composantes positives ou négatives) ; et il y correspond un unique point $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\mathbf{x}) = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{N}^n$ dont les composantes sont des entiers positifs et premiers entre eux, c'est à dire que $\mathrm{pgcd}(m_1, \ldots, m_n) = 1$ et $(m_1 : \ldots : m_n) \in U(\mathbf{A})$.

On considère alors la série de Dirichlet de plusieurs variables s'exprimant comme un produit eulérien dans l'ouvert $\Omega = \{\mathbf{s} : \sigma_i > 1, i = 1, \ldots, n\}$ et déterminée par $F_{\mathbf{A}} : \mathbf{N}^n \longrightarrow \mathbf{Z}$ tel que :

1. $F_{\mathbf{A}}(m_1, \ldots, m_n) = 1$ si $\gcd(m_1, \ldots, m_n) = 1$ et $\prod_i m_i^{a_{j,i}} = 1 \ \forall j \leq d$,
2. $F_{\mathbf{A}}(m_1, \ldots, m_n) = 0$ sinon.

$F_{\mathbf{A}}$ est la fonction caractéristique de $U(\mathbf{A})$ et apparaît dans des problèmes de comptage de points rationnels sur des variétés toriques. En effet, $F_{\mathbf{A}}$ permet d'associer une série de Dirichlet à une variété torique et par conséquent de donner une estimation asymptotique quand t tend vers l'infini de la quantité $\#\{\mathbf{x} \in U(\mathbf{A}) : \max_i (m_i(\mathbf{x})) \leq t\}$ en utilisant des théorème taubériens.

On peut montrer que $F_{\mathbf{A}}$ est multiplicative et $F_{\mathbf{A}}(m_1, \ldots, m_n) = 1$ si et seulement si $(m_1 : \ldots : m_n) \in U(\mathbf{A})$.

De plus, pour tout nombre premier p et tout $\nu \in \mathbf{N}^n_{\geq 0}$, on a :

$$F_{\mathbf{A}}(p^{\nu_1}, \ldots, p^{\nu_n}) = 1 \text{ ssi } \nu \in T(\mathbf{A}) := \{\nu \in \mathbf{N}^n_{\geq 0} : \mathbf{A}(\nu) = 0\}.$$

Donc pour $\mathbf{s} \in \Omega$ la série de Dirichlet étudiée peut s'écrire comme suit :

$$Z_{\mathbf{A}}(\mathbf{s}) := \sum_{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{N}^n_{\geq 1}} \frac{F_{\mathbf{A}}(m_1, \ldots, m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}} = \prod_p h_{\mathbf{A}}(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}),$$

où $h_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) := \sum_{\nu \in T(\mathbf{A})} \mathbf{X}^\nu$ est analytique pour $|X_i| < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Notons qu'a priori $h_{\mathbf{A}}$ n'est pas un polynôme.

Cependant on a la propriété cruciale suivante :

Définition 20. Une fonction analytique $h(\mathbf{X}) = h(X_1, \ldots, X_n)$ pour $|X_i| < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ est dite unitaire[1] s'il existe un ensemble fini $K \subseteq \mathbf{N}^n_{\geq 0} \setminus \{\mathbf{0}\}$, des entiers positifs $\{c(\nu)\}_{\nu \in K}$, et un polynôme $V \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, tels que pour tout $\mathbf{X}$ pour $|X_i| < 1$ $(i = (1, \ldots, n))$:

$$h(\mathbf{X}) = \left(\prod_{\nu \in K} (1 - \mathbf{X}^\nu)^{-c(\nu)} \right) V(\mathbf{X}).$$

Proposition 5 ([2], lemme 2 p. 14)**.** *La fonction $h_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X})$ est unitaire.*

[1]Ici unitaire ne signifie pas cyclotomique ; ce terme est celui utilisé en [2].

Remarque 11. Notons que si $h_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) = \left(\prod_{\nu \in K}(1-\mathbf{X}^{\nu})^{-c(\nu)}\right) V(\mathbf{X})$, il est clair que V est un polynôme à coefficients entiers et vérifie $V(\mathbf{0}) = 1$ puisque $h_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ et chaque $(1-\mathbf{X}^{\nu})^{-c(\nu)}$ valent 1 lorsque $\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

De plus nous avons :

$$Z_{\mathbf{A}}(\mathbf{s}) = \left(\prod_{\mathbf{m} \in K} \zeta(\langle \nu, \mathbf{s} \rangle)^{c(\nu)}\right) Z(V, \mathbf{s});$$

où $Z(V, \mathbf{s}) = \prod_p V(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n})$.

On peut donc considérer les $W(\delta)$ ($\delta \geq 0$) pour $Z_{\mathbf{A}}$ comme étant ceux correspondant au produit eulérien $Z(V, \mathbf{s})$ associé au polynôme V.

On obtient par conséquent le résultat suivant :

Théorème 11. *La fonction $\boldsymbol{s} \longmapsto Z_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{s})$ se prolonge de façon méromorphe jusque $W(0)$ (ici $W(\delta)$ pour $\delta \geq 0$ est calculé relativement au polynôme V).*

De plus, $\boldsymbol{s} \longmapsto Z_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{s})$ se prolonge méromorphiquement à tout $\mathbf{C}^n$ si V est cyclotomique.

Et si V n'est pas cyclotomique et $\mathcal{F}(\alpha_e) \subseteq \partial W(0)$ est une face non dégénérée, $\mathcal{F}(\alpha_e)$ est une frontière naturelle de $Z_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{s})$.

Remarque 12. Ce résultat est plus fort que dans [2]. En effet, le terme "frontière naturelle" doit ici s'entendre dans le sens du théorème 10.

Chapitre 5

Deuxième application : analogue multivariable de la conjecture de Rudnick-du Sautoy et réponse à une question posée par Kurokawa et Ochiai.

5.1 Introduction.

Le but de ce chapitre est d'étudier un analogue multivariable de la conjecture de Rudnick et de du Sautoy concernant le domaine maximal de méromorphie d'un produit eulérien

$$Z(s) = \prod_{p \text{ premier}} h\left(p^{-s}, p\right),$$

où $h(X_1, X_2) \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$.

Rappelons l'énoncé de cette conjecture :

Conjecture 2. $Z(s) = \prod_{p \text{ premier}} h\left(p^{-s}, p\right)$ se prolonge à tout le plan complexe si et seulement s'il existe des polynômes cyclotomiques $g_i(U)$ $(i = 1, \ldots, m)$ (i.e. des diviseurs de $(1 - U^{m_i})^{n_i}$ pour un certain n_i et un certain m_i) et des entiers u_i, v_i tels que :

$$h(X_1, X_2) = g_1\left(X_1^{u_1} X_2^{v_1}\right) \cdots g_m\left(X_1^{u_m} X_2^{v_m}\right).$$

Précisément, on s'intéresse ici au domaine maximal de méromorphie d'un produit eulérien de la forme suivante :

$$Z(\mathbf{s}) := Z(s_1, \ldots, s_n) = \prod_{p \text{ premier}} h\left(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c}\right) := Z^{n+1}(s_1, \ldots, s_n, c),$$

où $n > 1$, $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ est un nombre entier non nul fixé et $h(X_1, \ldots, X_{n+1}) \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ est un polynôme à coefficients entiers de coefficient constant égal à 1.

Ce qui a principalement motivé cette question est la résolution d'un problème posé par N. Kurokawa and H. Ochiai.

Si A est un anneau, la fonction zêta multivariable globale d'Igusa est définie de la façon suivante (pour $n > 1$) :

$$Z^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; A) := \sum_{m_1, \ldots, m_n \geq 1} \left| \text{Hom}_{\text{ring}} \left(A, \frac{\mathbf{Z}}{m_1 \cdots m_n \mathbf{Z}} \right) \right| m_1^{-s_1} \cdots m_n^{-s_n}.$$

On sait d'après le théorème des restes chinois que cette fonction zêta s'exprime comme un produit eulérien :

$$Z^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; A) = \prod_p Z_p^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; A)$$

où

$$Z_p^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; A) = \sum_{k_1, \ldots, k_n \geq 0} \left| \text{Hom}_{\text{ring}} \left(A, \frac{\mathbf{Z}}{p^{k_1 + \cdots + k_n} \mathbf{Z}} \right) \right| p^{-k_1 s_1 - \cdots - k_n s_n}.$$

En particulier le problème consiste à établir le domaine maximal de méromorphie de

$$Z^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}]) = \sum_{m_1, \ldots, m_n \geq 1} \frac{\varphi(m_1 \cdots m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}},$$

où φ désigne la fonction d'Euler classique.

Comme il a été spécifié dans [20] (page 12), le comportement analytique de ce produit est compliqué ; on parvient cependant à déterminer son domaine maximal de méromorphie en utilisant les outils qui ont été développés dans le chapitre 2 pour décrire la frontière naturelle, lorqu'elle existe, d'un produit eulérien de la forme $\prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n})$.

De plus, ce problème peut être vu comme un cas particulier de l'analogue multivariable de la conjecture de Rudnick-du Sautoy.

Notation :

Dans la suite on utilisera les notations suivantes :

Pour $r \geq 1$ et $n > 1$ on écrit :

$$\begin{aligned} h(\mathbf{X}) &= h(X_1,\ldots,X_{n+1}) &= 1+\sum_{j=1}^{r} a_j X_1^{\alpha_j^1}\cdots X_{n+1}^{\alpha_j^{n+1}} \\ & &= 1+\sum_{j=1}^{r} a_j \left(X_1,\ldots,X_n\right)^{\alpha_j^{(n)}} X_{n+1}^{\alpha_j^{n+1}} \\ & &= 1+\sum_{j=1}^{r} a_j \mathbf{X}^{\alpha_j}; \end{aligned}$$

avec $\alpha_j = (\alpha_j^{(n)}, \alpha_j^{n+1}) = (\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^n, \alpha_j^{n+1}) \in \mathbf{N}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ pour $j \in \{1, \ldots, r\}$ et $a_j \in \mathbf{Z}$.

Pour tout $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbf{N}^r$, on pose :

$$\|\mathbf{m}\| = \sum_{j=1}^{r} m_j.$$

Pour $\mathbf{s} \in \mathbf{C}^{n+1}, \mathbf{s} = (\mathbf{s}^{(n)}, s_{n+1}) = (s_1, ..., s_{n+1}), \forall l \in \{1, ..., n+1\}$ on écrit :

$$\begin{array}{rclclcl} \sigma_l &=& \Re(s_l); & & \gamma_l & = & \Im(s_l); \\ \sigma &=& \Re(\mathbf{s}) &=& (\sigma^{(n)}, \sigma_{n+1}) &=& (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1}); \\ \gamma &=& \Im(\mathbf{s}) &=& (\gamma^{(n)}, \gamma_{n+1}) &=& (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}); \end{array}$$

et

$$\alpha^l = \left(\alpha_1^l, ..., \alpha_r^l\right).$$

Etant donné $\mathbf{m} \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbf{m} = (m_1, ..., m_r)$ et $l \in \{1, ..., n+1\}$, on définit :

$$\langle \mathbf{m}, \alpha^l \rangle = \sum_{j=1}^{r} m_l \alpha_j^l$$

(respectivement pour $\mathbf{s} = (s_1, ...s_{n+1})$ et $j \in \{1, ..., r\}$, $\langle \mathbf{s}, \alpha_j \rangle = \sum_{l=1}^{n+1} s_l \alpha_j^l$).

Il faut souligner l'apparition naturelle d'une hypothèse supplémentaire qui permet de distinguer la conjecture de Rudnick-du Sautoy de son analogue multivariable puisqu'a priori cet analogue multivariable contient la conjecture elle-même.

On supposera donc à partir de maintenant que

$$\mathrm{Rang}\left(\alpha_j^{(n)}, j \in \{1, \ldots, r\}\right) > 1. \tag{5.1}$$

En effet, si cette hypothèse n'était pas vérifiée, on aurait l'existence de e tel que pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, $\alpha_j^{(n)} = q_j \alpha_e^{(n)}$ $(q_j \in \mathbf{Q})$; ce qui donnerait :

$$h(\mathbf{X}) = 1 + \sum_{j=1}^{r} a_j \left((X_1 \cdots X_n)^{\alpha_e^{(n)}} \right)^{q_j} X_{n+1}^{\alpha_j^{n+1}}.$$

Et on serait donc ramené à l'étude d'un produit d'une variable de la forme $\prod_p h(p^{-s}, p^{-c})$.

L'objectif de cet article est donc de déterminer le domaine maximal de tout produit $\prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c})$ $(n > 1)$ qui ne se réduit pas à un produit d'une variable.

On suppose également que pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}, \alpha_j^{(n)} = (\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^n) \neq \mathbf{0}$.

Il faut noter que, contrairement au cas d'une variable, le cas de plusieurs variables permet de pouvoir réutiliser une méthode dite de “perturbation” qui a été développée dans le chapitre 2.

Cette méthode consiste à considérer le produit dans une direction convenable au voisinage d'un point de la frontière supposée naturelle ; le cadre multivariable permet alors de déplacer le point sur la frontière si nécessaire et d'utiliser des arguments génériques pour assurer l'accumulation de pôles ou de zéros au voisinage à droite de la frontière.

Définition 21. On dira que $h(X_1, \ldots, X_{n+1})$ est cyclotomique s'il existe un sous-ensemble fini I de $\mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que :

$$h(X_1, \ldots, X_{n+1}) = \prod_{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in I} \left(1 - X_1^{\lambda_1} \cdots X_n^{\lambda_{n+1}}\right)^{\gamma(\lambda)},$$

où les $\gamma(\lambda)$ pour $\lambda \in I$ sont des entiers relatifs.

Si h est cyclotomique, il est facile de constater que le produit eulérien correspondant est un produit fini de fonctions zêta de Riemann ; et se prolonge donc méromorphiquement à tout $\mathbf{C}^n$.

A partir de maintenant, on suppose donc que h n'est pas cyclotomique.

Définition 22. On suppose que h n'est pas cyclotomique et ne contient pas de facteur cyclotomique.

Pour tout $\delta \geq 0$ on écrit :

$$W(\delta) = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \langle \sigma, \alpha_j \rangle > \delta, \forall j \in \{1, ..., r\} \right\};$$

et

$$W_c(\delta) = \left\{ \mathbf{s}^{(n)} \in \mathbf{C}^n \mid \left\langle \sigma^{0(n)}, \alpha_j^{(n)} \right\rangle + c\, \alpha_j^{n+1} > \delta, \forall j \in \{1, \ldots, r\} \right\}.$$

5.2 Enoncé des résultats de ce chapitre.

On suppose ici que h est tel que $\partial W(0)$ contient au moins une face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ non dégénérée au sens de la définition 8.

On prouvera au cours de ce chapitre deux résultats complémentaires concernant la frontière naturelle de $\prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c})$ qui dépendent de la validation d'une hypothèse que l'on notera (H) (voir le théorème 12).

On verra que si cette propriété (H) est satisfaite on est capable de déterminer la frontière naturelle au sens fort (voir le théorème 12) tandis que dans le cas contraire, on obtiendra toujours la frontière naturelle mais dans un sens plus faible (voir le théorème 13) : on verra qu'il ne peut exister de prolongement méromorphe si on translate globalement la frontière vers la gauche.

Théorème 12. *Soit $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ et*

$$Z(\boldsymbol{s}) = \prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c}).$$

On suppose que le polynôme $h(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$ n'est pas cyclotomique, ne contient pas de facteur cyclotomique, admet au moins une face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ non dégénérée, vérifie (5.1) et satisfait de plus la propriété (H) suivante :

$$\text{pour tout } j \in \{1, \ldots, r\} \text{ tel que } \alpha_j \notin \mathbf{Q}\alpha_e,\ \alpha_j^{(n)} \notin \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}.$$

Alors $\mathcal{F}(\alpha_e) \bigcap \{s_{n+1} = c\} \subseteq \partial W_c(0)$ est la frontière naturelle (au sens fort) de $Z(\boldsymbol{s})$: $Z(\boldsymbol{s})$ se prolonge de façon méromorphe jusque $W_c(0)$ et il n'existe pas de prolongement méromorphe de $Z(\boldsymbol{s})$ à tout domaine contenant une boule $\mathcal{B}$ (de dimension n) centrée en un point $\boldsymbol{s}^0$ tel que $\boldsymbol{s}^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e) \cap \{s_{n+1} = c\} \subseteq \partial W_c(0)$.

Théorème 13. *Soit $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ et*

$$Z(\boldsymbol{s}) = \prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c}).$$

On suppose que le polynôme $h(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$ n'est pas cyclotomique, ne contient pas de facteur cyclotomique, admet une face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ non dégénérée et vérifie (5.1) mais ne satisfait pas la propriété (H) du théorème 12.

On suppose de plus la propriété suivante :

$$\text{si } \alpha_{j_0}^{(n)} \notin \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)} \text{ alors les polynômes } 1 + \sum_{\alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_j \boldsymbol{X}^{\alpha_j} \text{ et } \sum_{j : \alpha_j - \alpha_{j_0} \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_j \boldsymbol{X}^{\alpha_j} \text{ sont premiers entre eux.} \tag{5.2}$$

Alors $\partial W_c(0)$ est une frontière naturelle (au sens faible) de $Z(\boldsymbol{s})$: $Z(\boldsymbol{s})$ n'admet pas de prolongement méromorphe jusque $W_c(\delta)$ pour tout $\delta < 0$.

En particulier, $Z(\boldsymbol{s})$ n'admet pas de prolongement méromorphe à tout $\mathbf{C}^n$.

En guise d'application, on verra qu'on est capable de déterminer la frontière naturelle (au sens fort) de la fonction zêta d'Igusa $Z^{\mathrm{ring}}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}])$ en obtenant le résultat suivant :

Théorème 14. *Le domaine maximal de méromorphie $\mathcal{M}$ de la fonction zêta d'Igusa :*

$$Z^{ring}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}]) = \sum_{m_1, \ldots, m_n \geq 1} \frac{\varphi(m_1 \cdots m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}}$$

est donné par :

$$\mathcal{M} = \left\{ \boldsymbol{s} \in \mathbf{C}^n \mid \forall\ I \subseteq \{1, \ldots, n\}, \sum_{i \in I} \sigma_i > -1 + \# I \right\}.$$

En particulier, si $s^0 \in \partial \mathcal{M}$, alors il n'existe pas de prolongement méromorphe de $Z^{ring}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}])$ à tout domaine contenant une boule $\mathcal{B}$ de dimension n centrée en s^0.

5.3 Preuve du théorème 12.

Considérons un point $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e) \cap \{s_{n+1} = c\}$ de partie réelle $\sigma^0 = (\sigma^{0^{(n)}}, c)$ et de partie imaginaire $\gamma^0 = (\gamma^{0^{(n)}}, 0)$.

Par conséquent, on a pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, $\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \geq 0$, et $\langle \sigma^0, \alpha_e \rangle = 0$.

Considérons une boule $\mathcal{B}$ de dimension n et de rayon arbitrairement petit autour du point $\mathbf{s}^{0^{(n)}}$.

Montrons que quitte à perturber $\mathbf{s}^{0^{(n)}} \in \mathcal{B}$ tel que $\mathbf{s}^0 = (s_1^0, \ldots, s_n^0, c) = (\mathbf{s}^{0^{(n)}}, c) \in \partial W(0)$, on peut supposer que :

$$\left\langle (\sigma^{0^{(n)}}, c), \alpha_j \right\rangle = 0 \iff \alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e. \tag{5.3}$$

Pour cela supposons l'existence de j_1 et de j_2 tels que $\mathbf{Q}\alpha_{j_1} \neq \mathbf{Q}\alpha_{j_2}$ et tels que :

$$\langle (\sigma^{0^{(n)}}, c), \alpha_{j_1} \rangle = \langle (\sigma^{0^{(n)}}, c), \alpha_{j_2} \rangle = 0.$$

On a alors :

1. $\langle(\sigma^{0^{(n)}}, c), \alpha_{j_1}\rangle = \sum_{l=1}^{n} \sigma_l^0 \alpha_{j_1}^l + c\ \alpha_{j_1}^{n+1} = 0$ définit un espace affine réel A_1 de dimension $n-1 > 0$ (selon $\sigma^{0^{(n)}}$).
2. $\langle(\sigma^{0^{(n)}}, c), \alpha_{j_2}\rangle = \sum_{l=1}^{n} \sigma_l^0 \alpha_{j_2}^l + c\ \alpha_{j_2}^{n+1} = 0$ définit un espace affine réel $A_2 \neq A_1$ de dimension $n-1 > 0$ (selon $\sigma^{0^{(n)}}$) car si $\alpha_{j_2}^{(n)} \in \mathbf{Q}\alpha_{j_1}^{(n)}$ on aurait nécessairement $\alpha_{j_2} \in \mathbf{Q}\alpha_{j_1}$ puisque $c \neq 0$.

Par conséquent on a nécessairement $\sigma^{0^{(n)}} \in A_1 \bigcap A_2$ et appartient donc dans un sous-espace affine de dimension inférieure ou égale à $n-2$; on a donc bien (5.3) quitte à bouger $\sigma^{0^{(n)}} \in \mathcal{B}$ tel que $(\mathbf{s}^{0^{(n)}}, c) \in \partial W(0)$.

De la même façon, on peut supposer (en perturbant $\sigma^{0^{(n)}}$ si besoin tel que $\mathbf{s}^{0^{(n)}} \in \partial W_c(0) \cap \mathcal{B}$ en évitant une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide) que pour $\lambda = (\lambda^{(n)}, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{Q}^{n+1}$:

$$\Big\langle (\sigma^{0^{(n)}}, c), \lambda \Big\rangle = 0 \iff \lambda \in \mathbf{Q}\alpha_e; \tag{5.4}$$

A partir de maintenant, on supposera également sans perte de généralité (quitte à renuméroter les indices) que $\alpha_e^n \neq 0$.

Définition 23. Etant donné $e \in \{1, \ldots, r\}$ on note $\langle \alpha_e \rangle$ la droite passant par $\mathbf{0}$ et α_e, et on définit alors la e-ième partie principale de h

$$[h]_e(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha_j \in \langle \alpha_e \rangle} a_j \mathbf{X}^{\alpha_j}.$$

Définition 24. Etant donné $e \in \{1, \ldots, r\}$ on pose

$$\begin{aligned} \Lambda_e &= \big\{ j \in \{1, \ldots, r\} : \alpha_j \in \langle \alpha_e \rangle \big\} \\ B_e &= \big\{ \beta \in \mathbf{N}^r : \beta_j = 0 \quad \text{si} \quad j \notin \Lambda_e \big\}. \end{aligned}$$

Comme dans le chapitre 2, le but est de montrer l'accumulation de zéros ou de pôles de la fonction d'une variable complexe en t suivante :

$$t \longmapsto Z^{n+1}(s_0^1 + t\theta_1, \ldots, s_0^n + t\theta_n, c) = Z^{n+1}(\mathbf{s}^0 + t\theta) = Z(\mathbf{s}^0 + t\theta);$$

en considérant une direction $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n, 0) \in \mathbf{Q}_{\geq 0}^{n+1}$ avec $\theta_{n+1} = 0$ et $\theta_l > 0$ pour $l \in \{1, \ldots, n\}$ dans un rectangle (pour $u \in \mathbf{R}, \eta > 0$) :

$$\Xi_{u,\eta} : \quad \begin{aligned} &0 < \Re(t) < 1 \\ &0 < u < \Im(t) < u + \eta. \end{aligned}$$

On suppose que θ vérifie les conditions suivantes :

$$\langle \theta, \alpha_j \rangle = \left\langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \right\rangle \geq 1 \text{ pour tout } j \in \{1, \ldots, r\}. \tag{5.5}$$

Tout d'abord, le théorème 7 énoncé dans §2.3.2 permet d'une part de vérifier que $Z^{n+1}(s_1, \ldots, s_{n+1})$ se prolonge méromorphiquement jusque $W(0)$ et donne son expression dans $W(\delta)$ pour tout $\delta > 0$:

Théorème 15. *On considère la quantité :*

$$C := C(h) = \frac{1}{|a_1| + \cdots + |a_r|}. \tag{5.6}$$

$Z^{n+1}(\boldsymbol{s})$ *est méromorphe dans* $W(0)$.

Si de plus on note pour tout $\delta > 0$ $M_\delta = \left[C^{-\frac{1}{\delta}}\right] + 1$ $(M_\delta \in \mathbf{N})$, *l'égalité suivante a lieu dans* $W(\delta)$ *:*

$$Z^{n+1}(\boldsymbol{s}) = \prod_{p \leq M_\delta} h\left(p^{-s_1}, ..., p^{-s_{n+1}}\right) \prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\boldsymbol{0}\}} \left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{\ell=1}^{n+1} \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell\right)\right]^{-\gamma(\beta)} ;$$

où $\zeta_{M_\delta}(z) = \zeta(z) \prod_{p \leq M_\delta} (1 - p^{-z})$ *(ζ désignant la fonction zêta de Riemann classique) possède exactement les mêmes zéros et pôle que la fonction zêta de Riemann classique avec les mêmes multiplicités..*

D'autre part, les éventuels zéros ou pôles de $\prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{0\}} \left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{\ell=1}^{n+1} \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell\right)\right]^{-\gamma(\beta)}$, *qui est méromorphe dans* $W(\delta)$, *appartiennent à l'ensemble :*

$$\Phi_\delta = \left\{ \boldsymbol{s} \in W(\delta), \exists \beta \in \mathbf{N}^r, \sum_{\ell=1}^{n+1} \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell = \rho,\ \rho \text{ zéro ou pôle de } \zeta(.) \right\}.$$

Remarque 13.
1. Le fait que le polynôme h n'est pas cyclotomique signifie que dans l'écriture de Z^{n+1} du théorème 15, le nombre de zêta-facteurs est infini.

   On s'intéresse en particulier à montrer l'accumulation des zéros de $\prod_{p \leq M_\delta} h\left(p^{-s_1}, ..., p^{-s_n}, p^{-c}\right)$ dans une direction convenable au voisinage à droite de $\partial W(0)$.
2. Dans la suite, on reprend en partie les arguments qui ont été exposés dans le chapitre 2 pour déterminer la frontière naturelle. La principale différence vient du fait qu'ici la direction θ et la partie imaginaire γ^0 de $\mathbf{s}^0$ doivent vérifier $\theta_{n+1} = \gamma_{n+1}^0 = 0$.

   C'est la raison pour laquelle on doit considérer en particulier les vecteurs $\alpha_j^{(n)}$ et les hypothèses (5.1) et (H) ; et on précisera toutes les modifications nécessaires par rapport à l'argumentation exposée dans le chapitre 2.

D'autre part le fait que la dernière composante s_{n+1} de $\mathbf{s}$ est fixée égale à c entraîne quelques différences majeures par rapport au chapitre 2. On distinguera notamment un cas particulier (voir le lemme 10) et les arguments qui seront utilisés à partir du lemme 13 différeront sensiblement de ceux utilisés dans le chapitre 2 (voir la remarque 16).

L'une des premières difficultés consiste à assurer le fait que le produit eulérien :

$$\prod_p h(p^{-s_1^0-t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0-t\theta_n}, p^{-c}),$$

bien qu'il soit associé à un polynôme h non cyclotomique, ne puisse se réduire à un produit fini de fonctions zêta après avoir spécialisé $s_{n+1} = c$ et une direction θ avec $\theta_{n+1} = 0$.

On peut en effet illustrer ceci en recitant l'exemple dû à Kurokawa du chapitre 3 :

Soit :

$$h(X_1, X_2, X_3) = 1 - X_1X_2 - X_2X_3 - X_3X_1 + 2X_1X_2X_3;$$

et le produit eulérien correspondant :

$$Z(s_1, s_2, s_3) = \prod_p \left(1 - p^{-s_1-s_2} - p^{-s_2-s_3} - p^{-s_3-s_1} + 2p^{-s_1-s_2-s_3}\right).$$

On a ici :

$$W(0) = \{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbf{C}^3 \mid \sigma_1 + \sigma_2 > 0, \sigma_2 + \sigma_3 > 0, \sigma_3 + \sigma_1 > 0\}.$$

Le polynôme h n'est pas cyclotomique car :

$$h(X_1, X_1, X_1) = (1 - X_1^2)(1 - X_1)^{-1}(1 - 2X_1);$$

et $(1 - 2X_1)$ est clairement non cyclotomique.

On sait donc d'après le théorème principal du chapitre 2 que Z se prolonge jusque $W(0)$ et qu'il n'existe pas de prolongement méromorphe à toute boule de dimension complexe 3 au-delà de tout point de $\partial W(0)$.

Cependant,

$$Z(s_1, s_2, 0) = \prod_p \left(1 - p^{-s_1}\right)\left(1 - p^{-s_2}\right) = \frac{1}{\zeta(s_1)\zeta(s_2)};$$

$Z(s_1, s_2, 0)$ est donc méromorphe sur $\mathbf{C}^2$: il y a ici un prolongement sur une hypersurface complexe au-delà du point $\mathbf{0} \in \partial W(0)$.

Le fait d'avoir $c \neq 0$ ici est donc d'une cruciale importance pour éviter cette difficulté comme le montre le résultat suivant :

Lemme 9. *Soit $h(X_1,\ldots,X_{n+1})\in\mathbf{Z}[X_1,\ldots,X_{n+1}]$ un polynôme non cyclotomique dans le sens de la définition 21.*

Alors si $\boldsymbol{s}^0=(\boldsymbol{s}^{0^{(n)}},c)\in\partial W(0)$ et $c\neq 0$, le produit eulérien d'une variable t :

$$\prod_p h(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n},p^{-c})$$

n'est pas un produit fini de fonctions zêta.

Preuve. Supposons par l'absurde que le produit s'écrive sous la forme d'un produit fini de fonctions zêta. Ainsi pour $\Re(t)$ assez grand on a l'égalité suivante pour tout nombre premier p assez grand :

$$\begin{aligned} h(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n},p^{-c}) &= 1+\sum_{j=1}^{r}a_jp^{-\langle \mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle - t\langle\theta,\alpha_j\rangle} \\ &= \prod_{\beta\in I\subseteq\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}\ \text{fini}}\left(1-p^{-\sum_{j=1}^r\beta_j\left(\langle\mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle+t\langle\theta,\alpha_j\rangle\right)}\right)^{\gamma(\beta)}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Ecrivons :

$$g(\mathbf{X})=g(X_1,\ldots,X_{n+1})=\prod_{\beta\in I\subseteq\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\left(1-\mathbf{X}^{\sum_{j=1}^r\beta_j\alpha_j}\right)^{\gamma(\beta)}.$$

Alors l'égalité (5.7) donne pour tout nombre premier p assez grand et pour $\Re(t)$ assez grand :

$$(h-g)(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n},p^{-c})=0. \tag{5.8}$$

Remarquons que $h\not\equiv g$ puisque h n'est pas cyclotomique par hypothèse.

Montrons maintenant que (5.8) n'est pas possible. Pour cela on vérifie que $p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n}$ et p^{-c} sont algébriquement indépendants.

Pour cela il suffit de vérifier que l'on peut trouver t tel que les $\sigma_l^0+\Re(t)\theta_l$ pour $l\in\{1,\ldots,n\}$ et c sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$ puisqu'une somme finie de monômes en $p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n}$ et p^{-c} s'écrit (J désignant ici un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}^{n+1}$) :

$$\sum_{\mathbf{m}\in J\subseteq\mathbf{N}^{n+1}}c_{\mathbf{m}}\ p^{-\langle\mathbf{m},(s_1^0+t\theta_1,\ldots,s_n^0+t\theta_n,c)\rangle}=\sum_{\mathbf{m}\in J\subseteq\mathbf{N}^{n+1}}c'_{\mathbf{m}}\ p^{-\langle\mathbf{m},(\sigma_1^0+\Re(t)\theta_1,\ldots,\sigma_n^0+\Re(t)\theta_n,c)\rangle} \tag{5.9}$$

où $c'_{\mathbf{m}}=c_{\mathbf{m}}\ p^{i\left(\langle\mathbf{m},(\gamma_1^0,\ldots,\gamma_n^0,0)\rangle+\Im(t)\langle\mathbf{m},(\theta_1,\ldots,\theta_n,0)\rangle\right)}$.

Et si les $\sigma_l^0 + \Re(t)\theta_l$ pour $l \in \{1, \dots, n\}$ et c sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, alors $\min_{\mathbf{m}\in J}\left(\langle \mathbf{m}, (\sigma_1^0 + \Re(t)\theta_1, \dots, \sigma_n^0 + \Re(t)\theta_n, c)\rangle\right) := M_{\mathbf{m}_0}$ est atteint pour une seule valeur $\mathbf{m}_0 \in J$.

Et en observant que pour $\Re(t)$ assez grand on a $\langle \mathbf{m}, (\sigma_1^0 + \Re(t)\theta_1, \dots, \sigma_n^0 + \Re(t)\theta_n, c)\rangle > 0$ puisque $\theta_l > 0$ pour $l \in \{1, \dots, n\}$, on obtient lorsque p tend vers l'infini :

$$\left| \sum_{\mathbf{m}\in J\subseteq \mathbf{N}^{n+1}} c_{\mathbf{m}}\, p^{-\langle \mathbf{m}, (s_1^0 + t\theta_1, \dots, s_n^0 + t\theta_n, c)\rangle} \right| \sim |c'_{\mathbf{m}_0}| p^{-M_{\mathbf{m}_0}} = |c_{\mathbf{m}_0}| p^{-M_{\mathbf{m}_0}} \neq 0.$$

Par conséquent il reste à vérifier que l'on peut trouver t tel que les $\sigma_l^0 + \Re(t)\theta_l$ pour $l \in \{1, \dots, n\}$ et c sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{Q}^{n+1}$, considérons l'égalité suivante :

$$\sum_{l=0}^{n} \lambda_l(\sigma_l^0 + \Re(t)\theta_l) + \lambda_{n+1}\, c = 0.$$

On obtient alors :

$$\langle \lambda^{(n)}, \sigma^{0^{(n)}}\rangle + \Re(t)\langle \lambda^{(n)}, \theta^{(n)}\rangle + \lambda_{n+1}\, c = 0. \tag{5.10}$$

Si maintenant $\langle \lambda^{(n)}, \theta^{(n)}\rangle \neq 0$; l'égalité (5.10) équivaut à :

$$\Re(t) = -\frac{\lambda_{n+1}\, c + \left\langle \lambda^{(n)}, (\sigma^{0^{(n)}})\right\rangle}{\langle \lambda^{(n)}, \theta^{(n)}\rangle} \in \mathbf{Q}(\sigma^{0^{(n)}}, c, \theta_1, \dots, \theta_n).$$

Si donc $\Re(t) \notin \mathbf{Q}(\sigma^{0^{(n)}}, c, \theta_1, \dots, \theta_n)$, les $\sigma_l^0 + \Re(t)\theta_l$ pour $l \in \{1, \dots, n\}$ et c sont effectivement linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$ et l'égalité (5.8) n'est donc pas possible.

Finalement, si $\left\langle \lambda^{(n)}, \theta^{(n)}\right\rangle = 0$, alors (5.10) donne que $\langle \lambda, \sigma^0\rangle = \langle \lambda^{(n)}, \sigma^{0^{(n)}}\rangle + c\lambda_{n+1} = 0$; et la condition (5.4) de genericité sur $\sigma^{0^{(n)}}$ permet d'affirmer que $\lambda = q\ \alpha_e \in \mathbf{Q}\alpha_e$.

On a donc par conséquent :

$$q\langle \theta, \alpha_e\rangle = \langle \lambda, \theta\rangle = \left\langle \lambda^{(n)}, \theta^{(n)}\right\rangle + \lambda_{n+1}.0 = 0.$$

Et donc $q = 0$ puisque $\langle \theta, \alpha_e\rangle \geq 1$ d'après l'hypothèse (5.5) ; ce qui termine la preuve de ce lemme. □

5.3.1 Détermination de la frontière naturelle de $Z(\mathrm{s})$.

On reprend, pas à pas, les arguments présentés dans le chapitre 2 pour prouver l'existence d'une infinité de zéros de $Z(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ qui proviennent en fait de $t \longmapsto h(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}, p^{-c})$ dans $\Xi_{u,\eta}$.

On précisera toutes les modifications engendrées par le fait qu'ici $\gamma_{n+1} = \theta_{n+1} = 0$.

Comme dans le chapitre 2 on définit le polynôme généralisé :

$$W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y) = 1 + \sum_{j=1}^r a_j p^{-i\left\langle \gamma^{0(n)}, \alpha_j^{(n)} \right\rangle} X^{\left\langle \sigma^{0(n)}, \alpha_j^{(n)} \right\rangle + c\alpha_j^{n+1}} Y^{\left\langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \right\rangle}.$$

Puisque $\mathbf{s}^0 = \left(\sigma^{0(n)}, c\right) + i\left(\gamma^{0(n)}, 0\right)$, on a :

$$W^p_{s^0,\theta}(p^{-1}, p^{-t}) = h\left(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}, p^{-c}\right).$$

Remarque 14.
1. $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ n'est pas un polynôme à coefficients entiers. Cependant, on peut écrire $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ sous la forme d'un produit a priori infini
$$\prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \left(1 - X^{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle} Y^{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle}\right)^{\gamma_{p,\gamma^0}(\beta)}; \qquad (5.11)$$
où les puissances $\gamma_{p,\gamma^0}(\beta)$ sont a priori complexes et les $1 - X^{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle} Y^{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle}$ ne sont pas des vrais monômes (les exposants ne sont pas des entiers).
On dira par abus de langage que (5.11) est l'expansion cyclotomique de $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ et que $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ est cyclotomique si son expansion cyclotomique est un produit fini.
2. L'hypothèse que $\mathcal{F}(\alpha_e)$ est une face non dégénérée fait qu'il est possible d'exprimer Y en fonction de X pour X au voisinage de 0 ($X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$) de sorte que $W^p_{s^0,\theta}(X,Y) = 0$; de plus le domaine de convergence des solutions obtenues est uniforme en p premier (voir la proposition 2 page 51 du chapitre 2).

L'objectif est de trouver une série de Puiseux $Y = \Omega^p_k(X)$ au voisinage de $X = 0$ ($X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$) telle que $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X, \Omega^p_k(X)) = 0$ vérifiant :

$$|\Omega^p_k(X)| < 1 \text{ pour } X > 0 \text{ au voisinage de } 0$$

De cette façon on aura une infinité de zéros $t_{m,p}$ ($m \in \mathbf{Z}$, p premier assez grand) de la forme

$$t_{m,p} = -\frac{\log\left(\Omega^p_k(p^{-1})\right)}{\log(p)} + \frac{2\pi m i}{\log(p)} \qquad (5.12)$$

(qui seront donc des zéros du facteur $t \longmapsto \prod_p h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\dots,p^{-s_n^0-t\theta_n},p^{-c}\right)$ de $Z(\mathbf{s}^0+t\theta)$ qui apparaît dans l'écriture du théorème 15)

de partie réelle strictement positive dans $\Xi_{u,\eta}$ pour p assez grand.

Ecrivons donc les séries de Puiseux $\Omega_k^p(X)$, en nombre fini, qui permettent d'exprimer, pour X dans un voisinage de 0, Y en fonction de X tel que $W^p_{s^0,\theta}(X,Y)=0$. On a pour $k\in\{1,\dots,f\}$:

$$\Omega_k^p(X)=c_{k,0}^p+c_{k,1}^pX^{\vartheta_{k,1}}+\cdots+c_{k,N}^pX^{\vartheta_{k,N}}+\Omega_{k,N+1}^p(X),\ (N\geq 1) \tag{5.13}$$

où $c_{k,m}^p\in\mathbf{C}$ (et dépend a priori de p) ;
$\vartheta_{k,N}>\cdots>\vartheta_{k,1}\in\mathbf{N}^*$; $\Omega_{k,N+1}^p(X)=o\left(X^{\vartheta_{k,N}}\right)$;

et on a :

$$\forall k\in\{1,\dots,f\},W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(X,\Omega_k^p(X)\right)=0.$$

Il faut noter que, d'après la proposition 2 page 51, le terme principal $c_{k,0}^p$ d'une branche de Puiseux est une racine du polynôme d'une variable :

$$[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e(T):=1+\sum_{j\in\Lambda_e}a_jp^{-i\left\langle\gamma^{0(n)},\alpha_j^{(n)}\right\rangle}T^{\left\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\right\rangle}.$$

Et réciproquement, toujours d'après la proposition 2 page 51, chaque racine de ce polynôme détermine le premier terme d'une branche de Puiseux de $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$.

Par ailleurs, si à chaque racine $c_{k,0}^p$ de $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e(T)$ on lui associe

$$c_{k,0}:=c_{k,0}^p\,p^{-i\frac{\langle\gamma^{0(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}{\langle\theta^{(n)},\alpha_e^{n}\rangle}}, \tag{5.14}$$

alors $|c_{k,0}|=\left|c_{k,0}^p\right|$ et $c_{k,0}$ est racine du polynôme (indépendant de p)

$$[h_\theta]_e(T):=1+\sum_{j\in\Lambda_e}a_jT^{\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}.$$

D'autre part, notons qu'a priori $\left\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\right\rangle\in\mathbf{Q}$.

Cependant, il existe un vecteur $\widehat{\alpha}_e$ dont les composantes sont premières entre elles et tel que $\alpha_e=q_e\widehat{\alpha}_e$.

De cette façon, si $j\in\Lambda_e$ i.e si $\alpha_j\in\mathbf{Q}\alpha_e$, alors il existe un entier $q_j\in\mathbf{N}^*$ tel que $\alpha_j=q_j\widehat{\alpha}_e$; il suffit donc d'imposer seulement que $\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle\in\mathbf{N}^*$ pour avoir $\langle\theta,\alpha_j\rangle=\left\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\right\rangle\in\mathbf{N}^*$ pour tout $j\in\Lambda_e$.

Remarquons que si $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e(T)$ n'est pas cyclotomique, alors il existe au moins une racine $c_{k,0}^p$ de module strictement inférieur à 1 qui fournira donc une branche de Puiseux $\Omega_k(X)$ vérifiant bien $|\Omega_k(X)|<1$ pour $X>0$ petit.

Traitons donc dès maintenant complètement ce cas particulier où $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e(T)$ n'est pas cyclotomique : on va montrer qu'il y a, parmi les deux facteurs de $Z(\mathbf{s}^{0(n)}+t\theta^{(n)})$ qui apparaissent dans l'écriture du théorème 15, beaucoup plus de zéros provenant du facteur

$$t \longmapsto \prod_p W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(p^{-1}, p^{-t}\right) = \prod_{p \le M_\delta} h\left(p^{-s_1^0+t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0+t\theta_n}, p^{-c}\right)$$

que de pôles provenant de

$$t \longmapsto \prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{\ell=1}^{n} \langle \beta, \alpha^\ell \rangle \left(s_l^0 + t\theta_\ell\right) + c\langle \beta, \alpha^{n+1}\rangle\right)\right]^{-\gamma(\beta)}$$

pour t se trouvant dans une région $\Delta_{u,\nu,\eta}$ au voisinage à droite de $\Re(t)=0$ déterminée par (pour $\nu, \eta, u > 0$) :

$$\Delta_{u,\nu,\eta} : \quad \begin{array}{l} \frac{1}{\nu+1} < \Re(t) < \frac{1}{\nu} \\ 0 < u < \Im(t) < u + \eta. \end{array}$$

De cette façon on va montrer l'accumulation de zéros $t_{m,p}$ ($m \in \mathbf{Z}$, p premier) de $Z\left(\mathbf{s}^{0(n)} + t\theta^{(n)}\right) = Z^{n+1}\left(\left(\mathbf{s}^{0(n)}, c\right) + t\left(\theta^{(n)}, 0\right)\right)$ dans $\Xi_{u,\eta} = \bigcup_{\nu \ge 1} \Delta_{u,\nu,\eta}$.

On pourra au passage noter que ce cas particulier ne nécessite pas l'utilisation d'arguments génériques consistant à perturber si besoin les paramètres σ^0, γ^0 ou θ. De plus, on est également en mesure de donner une estimation (en fonction de ν et η) du nombres de zéros $t_{m,p}$ dans $\Delta_{u,\nu,\eta}$. C'est en ce sens que ce cas particulier est plus simple que le cas où $[W^p_{s^0,\theta}]_e$ est cyclotomique qui sera traité plus tard.

Lemme 10. *On suppose que $[W^p_{\boldsymbol{s}^0,\theta}]_e$ n'est pas cyclotomique.*

$\partial W(0) \cap \{s_{n+1} = c\}$ est une frontière naturelle pour $Z(\boldsymbol{s}) = Z^{n+1}(s_1, \ldots, s_n, c)$.

En particulier, le nombre $S(\nu,\eta)$ de zéros $t_{m,p}$ de la forme (5.12) (comptés sans leur multiplicité) dans la région $\Delta_{\nu,\eta}$ (pour $\nu, \eta, u > 0$) est tel que pour tout $N \in \mathbf{N}$:

$$S(\nu,\eta) \ge \frac{\eta\left(C_{k_0} - 1\right)}{\mathcal{K}_N 4\pi} \nu^N,$$

où $\mathcal{K}_N$ est une constante dépendant de N et $C_{k_0} = \left|{c^p_{k,0}}^{-1}\right| > 1$ est le module de l'inverse d'une racine $c^p_{k,0}$ de $[W^p_{\boldsymbol{s}^0,\theta}]_e$ de module strictement inférieur à 1.

Preuve. Premièrement notons que pour $\Re(t) > \delta$, l'écriture du théorème 15 :

$$\begin{aligned}Z\left(\mathbf{s}^{0(n)}+t\theta^{(n)}\right) &= \prod_{p\leq M_\delta} h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n},p^{-c}\right)\\ &\prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\backslash\{\mathbf{0}\}}\left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\left(s_l^0+t\theta_\ell\right)+c\langle\beta,\alpha^{n+1}\rangle\right)\right]^{-\gamma(\beta)}\end{aligned}$$

a bien un sens car :

$$\forall j\in\{1\ldots,r\},\langle\sigma^0+\Re(t)\,\theta,\alpha_j\rangle\geq\Re(t)\,\langle\theta,\alpha_j\rangle>\delta\langle\theta,\alpha_j\rangle\geq\delta \text{ d'après (5.5).}$$

Considérons les zéros et les pôles de $Z\left(\mathbf{s}^{0(n)}+t\theta^{(n)}\right)$ dans le rectangle (pour $\nu,\eta,u>0$) :

$$\Delta_{u,\nu,\eta}:\quad \begin{array}{l}\frac{1}{\nu+1}<\Re(t)<\frac{1}{\nu}\\ 0<u<\Im(t)<u+\eta.\end{array}$$

Estimons tout d'abord le nombres des possibles pôles dans $\Delta_{\nu,\eta}$ provenant du facteur $\displaystyle\prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\backslash\{\mathbf{0}\}}\left[\zeta_{M_{\frac{1}{\nu+1}}}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\left(s_l^0+t\theta_\ell\right)+c\langle\beta,\alpha^{n+1}\rangle\right)\right]^{-\gamma(\beta)}$.

Rappelons (voir le théorème 15) que $\zeta_{M_{\frac{1}{\nu+1}}}$ a exactement les mêmes zéros et pôles que la fonction ζ de Riemann.

Si t_0 est un tel un pôle dans $\Delta_{u,\nu,\eta}$, il existe alors $\beta\in\mathbf{N}^r\backslash\{\mathbf{0}\}$ tel que $\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\left(s_\ell^0+t_0\theta_\ell\right)+c\langle\beta,\alpha^{n+1}\rangle$ est un zéro ou un pôle de la fonction ζ de Riemann ; et cette quantité satisfait nécessairement :

$$\Re(t_0)\left(\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\theta_\ell\right)\leq\Re\left(\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\left(s_\ell^0+t_0\theta_\ell\right)+c\langle\beta,\alpha^{n+1}\rangle\right)\leq 1$$

$$\left(\text{car }\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell^0+c\langle\beta,\alpha^{n+1}\rangle=\sum_{j=1}^{r}\beta_j\left\langle\left(\mathbf{s}^{0(n)},c\right),\alpha_j\right\rangle\geq 0\right).$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{\nu+1}<\Re(t_0)\leq\frac{1}{\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\theta_\ell};$$

ce qui fournit :

$$\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\theta_\ell\leq(\nu+1).$$

Cependant

$$\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\theta_\ell=\sum_{j=1}^{r}\beta_j\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle\geq\|\beta\|\quad\text{(d'après (5.5))},$$

Ainsi :

$$\|\beta\| \leq (\nu+1)\,. \tag{5.15}$$

De plus,

$$\Im\left(t_0\right) < u + \eta$$

donne :

$$\Im\left(\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^{\ell}\rangle\left(s_{\ell}^{0}+t_0\theta_{\ell}\right)+c\langle\beta,\alpha^{n+1}\rangle\right)=O\left(\left(\nu+1\right)\left(u+\eta\right)\right).$$

Ainsi, ayant fixé $\eta>0$, le nombre de zéros ou pôles d'un ζ-facteur de $\prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\left[\zeta_{M_{\frac{1}{\nu+1}}}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^{\ell}\rangle\left(s_{l}^{0}+t\theta_{\ell}\right)+c\langle\beta,\alpha^{n+1}\rangle\right)\right]^{-\gamma(\beta)}$ est donné par :

$$O\left(\left(\nu+1\right)\log\left(\nu+1\right)\right),$$

compte-tenu d'un résultat classique concernant l'estimation du nombre de zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann de partie imaginaire inférieure à $(\nu+1)$. De plus, le même pôle peut, d'après (5.15), apparaître dans au plus $(\nu+1)^r$ termes ; ce qui donne au plus :

$$O\left(\left(\nu+1\right)^{r+1}\log\left(\nu+1\right)\right)$$

pôles dans $\Delta_{\nu,\eta}$ (comptés sans leur multiplicité).

D'un autre côté, donnons une estimation du nombre de zéros $S\left(\nu,\eta\right)$ provenant de $\prod_{p\leq M_{\frac{1}{\nu+1}}} h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n},p^{-c}\right)=\prod_{p\leq M_{\frac{1}{\nu+1}}} W_{\mathbf{s}^0,\theta}^{p}\left(p^{-1},p^{-t}\right)$ dans $\Delta_{\nu,\eta}$.

On considère pour cela les branches de Puiseux $\Omega_k^p(X)$ de $W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p(X,Y)$ au voisinage de $X=0$ de la forme (5.13).

On vérifie que le premier terme $c_{k,0}^p$ de ces branches est une racine de $[W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p]_e(T)$ et que réciproquement chaque racine de ce polynôme détermine le terme principal d'une branche de Puiseux (voir la proposition 2 page 51).

Et comme par hypothèse $[W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p]_e(T)$ n'est pas cyclotomique, il existe donc une racine $c_{k,0}^p$ de module strictement inférieur à 1.

Considérons alors tout particulièrement une branche de Puiseux $\Omega_{k_0}^p(X)$ ayant ce premier terme $c_{k,0}^p := c_{k_0}^p$ avec $\left|c_{k_0}^p\right|<1$ et posons $C_{k_0}=|c_{k_0}^p|^{-1}>1$.

Pour p premier on écrit :

$$\Omega_{k_0}^p\left(p^{-1}\right)=c_{k_0}^p+c_{k_0,1}^p p^{-\vartheta_{k_0}}+\Omega_{k_0,2}^p\left(p^{-1}\right).$$

Ainsi, certains zéros de $t\longmapsto W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p\left(p^{-1},p^{-t}\right)$ pour p premier peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$t_{m,p}=-\frac{\log\left(c_{k_0}^p+c_{k_0,1}^p p^{-\vartheta_{k_0}}+\Omega_{k_0,2}^p\left(p^{-1}\right)\right)}{\log\left(p\right)}+\frac{2\pi mi}{\log\left(p\right)} \tag{5.16}$$

où $m \in \mathbf{Z}$.

Pour avoir $t_{m,p} \in \Delta_{\nu,\eta}$, il faut que l'on ait :

$$\frac{1}{\nu+1} < -\frac{\log\left|c^p_{k_0} + c^p_{k_0,1}p^{-\vartheta_{k_0}} + \Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)\right|}{\log\left(p\right)} < \frac{1}{\nu}. \tag{5.17}$$

Montrons alors que cette inégalité est bien vérifiée pour p se situant dans un intervalle convenable.

Tout d'abord, on peut supposer que $\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right) \neq 0$: cette propriété qui exploite la généricité en γ^0 sera montrée dans le lemme 11 page 113. (5.18)

Ainsi il existe $p_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $p > p_0$ on a soit :

$$\left|1 + \frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}} + \frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right| > 1 \ \text{ if } \Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right) > 0; \tag{5.19}$$

ou soit :

$$\left|1 + \frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}} + \frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right| < 1 \ \text{ if } \Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right) < 0. \tag{5.20}$$

Dans (5.19) ou (5.20) pour ν assez grand et

$$\begin{aligned} p \ &> \max\left(\left[4\nu\left|\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\right|\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu}\right]^{\frac{1}{\vartheta_{k_0}}}, \left[4\left(\nu+1\right)\left|\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\right|\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu+1}\right]^{\frac{1}{\vartheta_{k_0}}}\right) \\ &= \left[4\left(\nu+1\right)\left|\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\right|\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu+1}\right]^{\frac{1}{\vartheta_{k_0}}} \end{aligned}$$

(ce qui est possible d'après la proposition 2 page 51 car $|c^p_{k,0}| = |c_{k,0}| > 0$ et $|c^p_{k,1}|$ est borné indépendamment de p), on obtient :

$$(-1)^{\varepsilon}\left|1 + \frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}} + \frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu-\varepsilon} < \frac{1 + (-1)^{\varepsilon}\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu+\varepsilon}}{\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu+\varepsilon}} \tag{5.21}$$

où $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

En effet, (5.19) donne :

1. pour $\varepsilon = 0$:

$$\left|1 + \frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}} p^{-\vartheta_{k_0}} + \frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu} < 1 < \frac{1 + \left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu}}{\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu}};$$

2. pour $\varepsilon = 1$, puisque $p > \left[4\left(\nu+1\right)\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu+1}\right]^{\frac{1}{\vartheta_{k_0}}}$:

$$\begin{aligned}
&\log\left|1 + \tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}} p^{-\vartheta_{k_0}} + \tfrac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu-1} \\
= \ & \left(\left(1 + \tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}} p^{-\vartheta_{k_0}} + \tfrac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right)\overline{\left(1 + \tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}} p^{-\vartheta_{k_0}} + \tfrac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right)}\right)^{\frac{-\nu-1}{2}} \\
= \ & \log\left(1 + 2\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0},1}{c^p_{k_0}}\right) p^{-\vartheta_{k_0}} + o\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\right)^{\frac{-\nu-1}{2}} \\
= \ & \tfrac{-\nu-1}{2}\left(2\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0},1}{c^p_{k_0}}\right) p^{-\vartheta_{k_0}} + o\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\right) \\
> \ & -2\left(\nu+1\right)\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0},1}{c^p_{k_0}}\right) p^{-\vartheta_{k_0}} \text{ pour } \nu \text{ assez grand } \left(\nu \geq \nu_0\right) \\
> \ & -\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}} \\
> \ & \log\left(1 - \tfrac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}\right) = -\tfrac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}} + o\left(\tfrac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}\right);
\end{aligned}$$

ce qui fournit l'inégalité recherchée (pour $\nu \geq \nu_0$) :

$$\left|1 + \frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}} p^{-\vartheta_{k_0}} + \frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu-1} > 1 - \left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{-1-\nu} = \frac{-1 + \left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{1+\nu}}{\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{1+\nu}}.$$

De façon similaire, (5.20) donne :

1. pour $\varepsilon = 0$, puisque $p > \left[-4\nu\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu}\right]^{\frac{1}{\vartheta_{k_0}}}$:

$$
\begin{aligned}
& \log\left|1+\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\tfrac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu} \\
= \ & \tfrac{\nu}{2}\left(-2\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}}+o\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\right) \\
< \ & 2\nu\left(-\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}}\right) \text{ pour } \nu \text{ assez grand } (\nu\geq\nu_1) \\
< \ & \tfrac{1}{2C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}} \\
< \ & \log\left(1+\tfrac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}\right)=\tfrac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}+o\left(\tfrac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}\right);
\end{aligned}
$$

ce qui garantit (pour $\nu\geq\nu_1$) :

$$\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu}<1+\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}.$$

2. pour $\varepsilon=1$:

$$\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu-1}>1>1-\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}=\frac{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}-1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}.$$

Si on choisit maintenant :

$$C^\nu_{k_0}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\leq p\leq C^{\nu+1}_{k_0}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right),$$

(ce qui est compatible avec la précédente condition sur p pour avoir (5.21)) alors (5.17) a bien lieu puisque d'après (5.21) on a :

$$
\begin{aligned}
C^\nu_{k_0}\left|1+\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\tfrac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu} & < C^\nu_{k_0}\left(1+\tfrac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right) \\
& \leq p \\
& \leq C^{\nu+1}_{k_0}\left(1-\tfrac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right) \\
& < C^{\nu+1}_{k_0}\left|1+\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\tfrac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu-1};
\end{aligned}
$$

et en prenant finalement le logarithme de part et d'autre on déduit (5.17).

Maintenant, $\eta > 0$ étant fixé, si on choisit ν entier positif tel que $\frac{2\pi}{\log\left(C_{k_0}^{\nu}+1\right)} < \eta$, alors pour tout premier p tel que :

$$C_{k_0}^{\nu}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right) \leq p \leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right),$$

on aura $t_{m,p} \in \Delta_{\nu,\eta}$ si et seulement si :

$$u < \frac{2\pi m}{\log(p)} - \frac{\arg\left(\Omega_{k_0}^{p}\left(p^{-1}\right)\right)}{\log(p)} < u+\eta,$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{u\log(p)}{2\pi} + \frac{\arg\left(\Omega_{k_0}^{p}\left(p^{-1}\right)\right)}{2\pi} < m < \frac{(u+\eta)\log(p)}{2\pi} + \frac{\arg\left(\Omega_{k_0}^{p}\left(p^{-1}\right)\right)}{2\pi}. \tag{5.22}$$

On aura donc pour p fixé $\frac{\eta\log(p)}{2\pi} + \varpi$ zéros $t_{m,p}$ de $W_{\mathbf{s}^0,\theta}^{p}\left(p^{-1},p^{-t}\right)$ dans $\Delta_{\nu,\eta}$ où $|\varpi| \leq 1$.

Finalement, si $S^*(\nu,\eta)$ désigne le nombre de zéros de $\prod_{p\leq M_{\frac{1}{\nu+1}}} h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n},p^{-c}\right)$ dans $\Delta_{\nu,\eta}$ a priori comptés avec leur multiplicité, on aura :

$$S^*(\nu,\eta) \geq \sum_{C_{k_0}^{\nu}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\leq p\leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)} \left(\frac{\eta\log(p)}{2\pi}+\varpi\right). \tag{5.23}$$

En prenant ν assez grand de sorte que $C_{k_0}^{-\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}} < \frac{C_{k_0}-1}{2\left(C_{k_0}^{1-\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}+1\right)}$ et en utilisant le théorème des nombres premiers (i.e. $\sum_{p\leq x}\log(p) \sim x$), (5.23) donne :

$$\begin{aligned} S^*(\nu,\eta) &\geq \frac{C_{k_0}^{\nu}\eta\left(C_{k_0}-1\right)}{4\pi} - \sum_{C_{k_0}^{\nu}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\leq p\leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)} 1 \\ &\geq \frac{C_{k_0}^{\nu}\eta\left(C_{k_0}-1\right)}{4\pi} - \frac{C_{k_0}^{\nu+1}}{\log\left(C_{k_0}^{\nu+1}\right)} \\ &\sim \frac{C_{k_0}^{\nu}\eta\left(C_{k_0}-1\right)}{4\pi}. \end{aligned}$$

Pour être en mesure de minorer $S(\nu,\eta)$, on veut établir une majoration de la multiplicité d'un zéro ou pôle $t_{m,p}$.

Ainsi étant donné un nombre premier p et un entier m, on veut majorer :

$$\mathcal{M}(m,p) = \#\left\{(m',p') \mid m' \in \mathbf{Z}, p' \text{ prime}, t_{m,p} = t_{m',p'}\right\}.$$

Notons que l'on peut supposer sans perte de généralité que si p' est tel qu'il existe un entier m tel que $t_{m,p} = t_{m',p'}$, alors $p' \geq p$.

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} -\log \Omega_{k_0}^{p}\left(p^{-1}\right) &= -\log\left(c_{k_0}^{p}\right) + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right); \\ -\log \Omega_{k_0}^{p}\left(p'^{-1}\right) &= -\log\left(c_{k_0}^{p'}\right) + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right). \end{aligned} \tag{5.24}$$

De plus d'après (5.14) on peut écrire pour tout nombre premier p

$$c_{k_0}^{p} = c_{k_0} p^{i\frac{\left\langle \gamma^{0(n)},\alpha_e^{(n)}\right\rangle}{\left\langle \theta^{(n)},\alpha_e^{(n)}\right\rangle}},$$

où c_{k_0} ne dépend pas de p.

On remarque d'autre part que $\Re\left(\log\left(c_{k_0}\right)\right) = \log\left|c_{k_0}\right| \neq 0$ car $\left|c_{k_0}\right| = \left|c_{k_0}^{p}\right| < 1$.

Compte-tenu de (5.24), l'égalité $t_{m,p} = t_{m',p'}$ fournit donc :

$$\frac{-\log\left(c_{k_0}\right) + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)}{\log(p)} + \frac{2i\pi m}{\log(p)} = \frac{-\log\left(c_{k_0}\right) + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)}{\log(p')} + \frac{2i\pi m'}{\log(p')}. \tag{5.25}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires de (5.25), on obtient les estimations :

$$\begin{cases} -\log\left|c_{k_0}\right|\left(\dfrac{1}{\log(p)} - \dfrac{1}{\log(p')}\right) & = O\left(\dfrac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log(p)}\right), \\ -\arg\left(c_{k_0}\right)\left(\dfrac{1}{\log(p)} - \dfrac{1}{\log(p')}\right) + 2\pi\left(\dfrac{m}{\log(p)} - \dfrac{m'}{\log(p')}\right) & = O\left(\dfrac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log(p)}\right). \end{cases}$$

Et puisque $\log\left|c_{k_0}\right| \neq 0$, il vient :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\log(p)} - \dfrac{1}{\log(p')} & = O\left(\dfrac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log(p)}\right), \\ \dfrac{m}{\log(p)} - \dfrac{m'}{\log(p')} & = O\left(\dfrac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log(p)}\right). \end{cases} \tag{5.26}$$

La première ligne de (5.26) permet d'affirmer que :

$$\log(p') - \log(p) = O\left(\frac{\log(p')}{p^{\vartheta_{k_0}}}\right).$$

Par conséquent il existe une constante absolue A_1 telle que si p' est tel qu'il existe m' vérifiant $t_{m',p'} = t_{m,p}$ alors :

$$\log(p') - \log(p) \leq A_1 \frac{\log(p')}{p^{\vartheta_{k_0}}}.$$

On a donc :

$$\log(p') \leq \frac{\log(p)}{1 - \frac{A_1}{p^{\vartheta_{k_0}}}} \leq \log(p)\left(1 + \frac{A_2}{p^{\vartheta_{k_0}}}\right);$$

où A_2 est une constante absolue (on peut par exemple choisir $A_2 = 2A_1$).

S'il existe m' tel que $t_{m',p'} = t_{m,p}$, alors p' satisfait nécessairement

$$p' \leq p^{1+\frac{A_2}{p^{\vartheta_{k_0}}}}. \tag{5.27}$$

Pour p fixé, dénombrons le nombre $\mathcal{M}'(p)$ de p' satisfaisant (5.27).

Pour cela on utilise le théorème des nombres premiers qui donne l'estimation suivante pour le nombre de nombres premiers $\pi(x)$ plus petits que x :

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)} + O\left(xe^{-c\sqrt{\log(x)}}\right);$$

où c est une constante absolue explicite.

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}'(p) &= \pi\left(p^{1+A_2p^{-\vartheta_{k_0}}}\right) - \pi(p) \\
&= \int_2^{p^{1+A_2p^{-\vartheta_{k_0}}}} \frac{dt}{\log(t)} + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right).
\end{aligned}$$

Or on a uniformément en $t \in \left[p, p^{1+A_2p^{-\vartheta_{k_0}}}\right]$:

$$\log(t) = \log(p) + O\left(\log(p)\, p^{-\vartheta_{k_0}}\right);$$

ce qui fournit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}'(p) &= \frac{1}{\log(p) + O\left(\log(p)\, p^{-\vartheta_{k_0}}\right)}\left(p^{1+A_2p^{-\vartheta_{k_0}}} - p\right) + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right) \\
&= O\left(\frac{p}{\log(p)}\left(p^{A_2p^{-\vartheta_{k_0}}} - 1\right)\right) + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right) \\
&= O\left(\frac{p}{\log(p)}\left(e^{A_2\log(p)p^{-\vartheta_{k_0}}} - 1\right)\right) + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right) \\
&= O\left(p^{1-\vartheta_{k_0}}\right) + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right) \\
&= O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right).
\end{aligned}$$

Maintenant, ayant fixé un entier $m \in \mathbf{Z}$ et un nombre premier p, considérons un nombre premier p' vérifiant (5.27) et estimons le nombre d'entiers m' tels que $t_{m,p} = t_{m',p'}$.

Compte-tenu de (5.26), on a :

$$\frac{m}{\log(p)} - \frac{m'}{\log(p')} = O\left(\frac{1}{p^{\vartheta_{k_0}} \log(p)}\right).$$

Mais puisque p' vérifie (5.27), on a :

$$\log(p') = \log(p) + O\left(\log(p)\, p^{-\vartheta_{k_0}}\right);$$

et par conséquent :

$$\begin{array}{lcl} m - m'\dfrac{\log(p)}{\log(p')} & = & O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right) \\ m - m'\left(\dfrac{1}{1 + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)}\right) & = & O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right) \\ m - m'\left(1 + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\right) & = & O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right) \\ m - m' & = & O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right) + O\left(m' p^{-\vartheta_{k_0}}\right). \end{array}$$

D'autre part, si $t_{m',p'} \in \Delta_{\nu,\eta}$, alors d'après (5.22) m' doit vérifier :

$$m' = O(\log(p')) = O(\log(p));$$

donc :

$$m - m' = O\left(\log(p)\, p^{-\vartheta_{k_0}}\right).$$

En particulier, pour p assez grand, $p > p_1$ (p_1 étant une constante absolue), on déduit :

$$|m - m'| < \frac{1}{2};$$

et :

$$m = m'.$$

Donc si $p > p_1$, les couples (m', p') tels que $t_{m',p'} = t_{m,p}$ sont nécessairement tels que $m = m'$.

Et finalement :

$$\mathcal{M}(m,p) = \mathcal{M}'(p) = O\left(p e^{-c\sqrt{\log(p)}}\right).$$

Pour conclure, si p est tel que $C_{k_0}^{\nu}\left(1 + \frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right) \leq p \leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1 - \frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)$, alors pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe en particulier une constante $\mathcal{K}_N$ qui dépend de N

telle que pour tout $m \in \mathbf{N}$:

$$\mathcal{M}(m,p) \leq \mathcal{K}_N \frac{C_{k_0}^{\nu}}{\nu^N}.$$

Autrement dit pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a finalement :

$$S(\nu,\eta) \geq \frac{S^*(\nu,\eta)}{\mathcal{K}_N \frac{C_{k_0}^{\nu}}{\nu^N}} \sim \frac{\eta(C_{k_0}-1)}{\mathcal{K}_N 4\pi}\nu^N.$$

Pour $N > r+1$, on a en particulier que $(\nu+1)^{r+1}\log(\nu+1) = o(S(\nu,\eta))$ lorsque ν tend vers l'infini ; ce qui complète la preuve de ce lemme. $\square$

Le cas où $[W^p_{s^0,\theta}]_e(T)$ n'est pas cyclotomique étant désormais complètement traité, on suppose donc à partir de maintenant que $[W^p_{s^0,\theta}]_e(T)$ est cyclotomique.

Le problème est plus délicat lorsque le polynôme $[W^p_{s^0,\theta}]_e(T)$ est cyclotomique.

On reprend pas à pas l'argumentation du chapitre 2 qui consiste à trouver, en choisissant θ convenablement, deux séries de Puiseux de terme principal opposé $\pm c^p_{k,0}$ et de même second terme $c^p_{k,1}X^{\vartheta_{k,1}}$. De cette façon, même s'il n'est pas possible d'avoir $\left|c^p_{k,0}\right| < 1$ puisqu'ici $[W_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$ est cyclotomique, l'une de ces deux branches sera de module strictement inférieur à 1 pour $X > 0$ petit à condition d'avoir $\arg\left(\frac{c^p_{k,1}}{c^p_{k,0}}\right) \neq \frac{\pi}{2}$. C'est la raison pour laquelle on utilise un argument de généricité au niveau de la partie imaginaire $\gamma^0 = \left(\gamma^{0(n)},0\right)$ de $\mathbf{s}^0$ pour assurer

$$\arg\left(\frac{c^p_{k,1}}{c^p_{k,0}}\right) \neq \frac{\pi}{2} \mod (\pi).$$

On considère tout d'abord un indice particulier $e' \in \{1,\ldots,r\}$ vérifiant :

$$\langle\sigma^0,\alpha_{e'}\rangle > 0 \text{ est minimal.} \tag{5.28}$$

parmi les $\langle\sigma^0,\alpha_{j_0}\rangle > 0$ vérifiant $\sum_{\{j:\alpha_j-\alpha_{j_0}\in\mathbf{Q}\alpha_e\}} a_j p^{-i\langle\gamma^{0(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle} {c^p_{k,0}}^{\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle} \neq 0.$

Il faut noter ici une difficulté provenant du fait que $\theta_{n+1} = 0$.

En effet, dans toute la suite, on a besoin (notamment dans la preuve du lemme 12) que $\theta = \left(\theta^{(n)},0\right) \in \mathbf{Q}^n \times \{0\}$ satisfasse, en plus de (5.5), les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned}&\langle\theta^{(n)},\widehat{\alpha_e}^{(n)}\rangle\in\mathbf{Z}_+\text{ est pair;}\\&\langle\theta^{(n)},\alpha_{e'}^{(n)}\rangle\in\mathbf{Z}_+\text{ est impair.}\end{aligned}\tag{5.29}$$

Or, *bien que les vecteurs α_e et $\alpha_{e'}$ ne soient pas colinéaires (d'après (5.4) puisque $\langle\sigma^0,\alpha_e\rangle=0$ et $\langle\sigma^0,\alpha_{e'}\rangle>0$), il se pourrait que l'on ait $\alpha_{e'}^{(n)}\in\mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$* ; et dans ce cas il ne serait pas possible de choisir un tel θ avec $\theta_{n+1}=0$ vérifiant (5.29).

Pour surmonter cette difficulté, *c'est ici qu'intervient l'hypothèse (H)* de l'énoncé du théorème 12 qui, parce que l'on sait que α_e et $\alpha_{e'}$ ne sont pas colinéaires, assure que $\alpha_{e'}^{(n)}\notin\mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$; et par conséquent il est possible de trouver $\theta=\left(\theta^{(n)},0\right)$ vérifiant (5.29).

Cette même difficulté par rapport au chapitre 2 intervient également dans la preuve du lemme qui suit :

Lemme 11. *Soit $\Omega_k^p(X)=c_{k,0}^p+c_{k,1}^pX^{\vartheta_{k,1}}+o\left(X^{\vartheta_{k,1}}\right)$ une branche de Puiseux de terme initial $c_{k,0}^p$, racine de $[W_{\boldsymbol{s}^0,\theta}^p]_e$.*

Quitte à perturber de façon générique $\gamma^{0(n)}\in\mathbf{R}^n$ de sorte que $\boldsymbol{s}^{0(n)}\in\mathcal{B}\cap\partial W_c(0)$, on peut supposer

$$\arg\left(\frac{c_{k,1}^p}{c_{k,0}^p}\right)\neq\frac{\pi}{2}\mod(\pi).$$

Remarque 15. Ce lemme ne nécessite pas l'hypothèse que $[W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p]_e(T)$ est cyclotomique ; ce résultat intervient d'ailleurs dans la preuve du lemme 10 page 102 (voir (5.18) page 105).

Preuve. Débutons par donner une expression de $c_{k,1}^p$ en fonction de p, de $\gamma^{0(n)}$ et de $c_{k,0}^p$. Pour cela, il suffit d'effectuer la première étape de l'algorithme de Puiseux. En effet, on pose tout d'abord $\Omega_k^p(X):=c_{k,0}^p+c_{k,1}^p\phi(X)$ ($\phi(0)=0$) ; et on détermine $c_{k,1}^p$ à partir de l'identité

$$W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p\left(X,c_{k,0}^p+c_{k,1}^p\phi(X)\right)=0\text{ pour tout }X>0\text{ au voisinage de }0.\tag{5.30}$$

en utilisant le fait que les termes de plus bas degré de (5.30) doivent se simplifier.

De cette façon, on obtient l'expression suivante pour $c_{k,1}^p$ (voir le lemme 6 du chapitre 2 pour le calcul explicite) :

$$c_{k,1}^p=\frac{-\sum_{j|\alpha_j-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e}a_jp^{-i\langle\gamma^{0(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}\left(c_{k,0}^p\right)^{\left\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\right\rangle}}{[W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p]_e'\left(c_{k,0}^p\right)}.$$

Rappelons également que l'on a d'après (5.14) :

$$c_{k,0}^p=c_{k,0}p^{i\frac{\langle\gamma^{0(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}{\langle\theta^{(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}};$$

ce qui permet d'identifier clairement la dépendance en p et en $\gamma^{0(n)}$ de $c_{k,0}^p$.

Observons de plus près le dénominateur $c_{k,0}^p[W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p]_e'\left(c_{k,0}^p\right)$ de $\frac{c_{k,1}^p}{c_{k,0}^p}$ et montrons en particulier qu'il ne dépend ni de $\gamma^{0(n)}$, ni même de p.

En effet :

$$\begin{aligned} c_{k,0}^p[W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p]_e'\left(c_{k,0}^p\right) &= c_{k,0}p^{i\frac{\langle\gamma^{0(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}{\langle\theta^{(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}} \\ &\quad \sum_{j\in\Lambda_e} a_j\langle\theta,\alpha_j\rangle c_{k,0}^{\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle-1} p^{i\left(\frac{\langle\gamma^{0(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}{\langle\theta^{(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}\left(\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle-1\right)-\langle\gamma^{0(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle\right)} \\ &= \sum_{j\in\Lambda_e} a_j\langle\theta,\alpha_j\rangle c_{k,0}^{\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}, \end{aligned}$$

puisque $j\in\Lambda_e$ implique que $\frac{\langle\gamma^{0(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}{\langle\theta^{(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle = \langle\gamma^{0(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle$.

Supposons maintenant par l'absurde que pour tout $\gamma^{0(n)}\in\mathbf{R}^n$ de sorte que $\mathbf{s}^{0(n)}\in\mathcal{B}\cap\partial W_c(0)$ il existe un nombre premier p tel que

$$\arg\left(\frac{c_{k,1}^p}{c_{k,0}^p}\right) = \frac{\pi}{2} \mod (\pi).$$

On aurait alors

$$\arg\left(\frac{c_{k,1}^p}{c_{k,0}^p}\right) \in \left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}.$$

Posons pour k tel que $\alpha_k\in\alpha_{e'}+\mathbf{Q}\alpha_e$:

$$\lambda_k := \frac{-\ a_k\ c_{k,0}^{\left\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\right\rangle}}{\sum_{j\in\Lambda_e} a_j\langle\theta,\alpha_j\rangle c_{k,0}^{\left\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\right\rangle}} \in\mathbf{C}$$

ne dépendant ni de p ni de $\gamma^{0(n)}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{c_{k,1}^p}{c_{k,0}^p} &= \sum_{\{k:\alpha_k-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e\}} \lambda_k p^{i\left(\left\langle\gamma^{0(n)},\alpha_e^{(n)}\right\rangle\frac{\left\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\right\rangle}{\left\langle\theta^{(n)},\alpha_e^{(n)}\right\rangle}-\left\langle\gamma^{0(n)},\alpha_k^{(n)}\right\rangle\right)} \\ &= \sum_{\{k:\alpha_k-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e\}} \lambda_k p^{i\left\langle\gamma^{0(n)},w_k\right\rangle}, \end{aligned}$$

si l'on note

$$w_k := \frac{\left\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\right\rangle}{\left\langle\theta^{(n)},\alpha_e^{(n)}\right\rangle}\alpha_e^{(n)} - \alpha_k^{(n)}.$$

Remarquons que ces w_k sont tous égaux. Si en effet k, k' sont tels que $\alpha_k - \alpha_{e'} \in \mathbf{Q}\alpha_e$ et $\alpha_{k'} - \alpha_{e'} \in \mathbf{Q}\alpha_e$, alors $\alpha_k - \alpha_{k'} \in \mathbf{Q}\alpha_e$ et il existe donc $q \in \mathbf{Q}$ tel que :

$$\alpha_k - \alpha_{k'} = q\alpha_e.$$

En particulier on a également $\alpha_k^{(n)} - \alpha_{k'}^{(n)} = q\alpha_e^{(n)}$; et par conséquent

$$\frac{\left\langle \theta^{(n)}, \alpha_k^{(n)} - \alpha_{k'}^{(n)} \right\rangle}{\left\langle \theta^{(n)}, \alpha_e^{(n)} \right\rangle} \alpha_e^{(n)} = q\alpha_e^{(n)} = \alpha_k^{(n)} - \alpha_{k'}^{(n)};$$

et donc $w_k = w_{k'} = w_{e'}$.

Montrons de plus que $w_{e'} \neq \mathbf{0}$: cette propriété est cruciale si l'on veut espérer pouvoir perturber $\arg\left(\frac{c_{k,1}^p}{c_{k,0}^p}\right)$ *en faisant varier $\gamma^{0(n)}$. C'est à ce niveau précisément qu'intervient là encore l'hypothèse (H) de l'énoncé du théorème 12.*

En effet, $w_{e'} = \mathbf{0}$ équivaut à $\alpha_{e'}^{(n)} \in \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$. Or on sait que les vecteurs α_e et $\alpha_{e'}$ ne sont pas colinéaires car d'une part $\langle \sigma^0, \alpha_{e'} \rangle > 0$ et d'autre part $\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle = 0$ si et seulement si $\alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e$ d'après la condition de généricité (5.3) sur $\sigma^0 = \left(\sigma^{0(n)}, c\right)$.

Et par conséquent l'hypothèse (H) assure que $\alpha_{e'}^{(n)} \notin \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$ et donc que $w_{e'} \neq \mathbf{0}$.
On a donc finalement :

$$\frac{c_{k,1}^p}{c_{k,0}^p} = p^{i\left\langle \gamma^{0(n)}, w_{e'} \right\rangle} \sum_{k | \alpha_k - \alpha_{e'} \in \mathbf{Q}\alpha_e} \lambda_k.$$

Si l'on pose maintenant

$$\varphi := \arg\left(\sum_{k | \alpha_k - \alpha_{e'} \in \mathbf{Q}\alpha_e} \lambda_k \right);$$

(φ ne dépend ni de p ni de $\gamma^{0(n)}$), on obtient alors :

$$\gamma^{0(n)} \in M := \bigcup_p \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \left\langle \gamma^{0(n)}, w_{e'} \right\rangle \log(p) + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}.$$

Or M est une réunion dénombrable d'hyperplans affines selon $\gamma^{0(n)}$ qui sont d'intérieur vide dans $\mathbf{R}^n$ (*car $w_{e'} \neq \mathbf{0}$*) ; et d'après le théorème de Baire la réunion dénombrable de ces hyperplans est aussi d'intérieur vide dans $\mathbf{R}^n$.

Par conséquent les conditions ci-dessus ne peuvent être satisfaites pour tout $\gamma^{0(n)}$ inclu dans une boule de $\mathbf{R}^n$; on obtient donc une contradiction à l'hypothèse énoncée en haut, ce qui termine la preuve de ce lemme. $\square$

Le lemme que l'on vient de montrer (qui à la différence du lemme 5 du chapitre 2 utilise l'hypothèse (H)) permet de prouver le résultat fondamental suivant qui exprime le fait qu'il y a accumulation de zéros $t_{m,p}$ de partie réelle strictement positive dans $\Xi_{u,\eta}$.

Lemme 12. *On suppose que* $[W^p_{\boldsymbol{s}^0,\theta}]_e$ *est un polynôme cyclotomique.*

Il existe une série de Puiseux $\Omega^p_k(X)$*, solution de* $W^p_{\boldsymbol{s}^0,\theta}(X,Y)=0$*, vérifiant*

$$|\Omega^p_k(X)|<1 \text{ pour } X \text{ strictement positif au voisinage de } 0;$$

et qui fournit une infinité de zéros $t_{m,p}\in\Xi_{u,\eta}$ *de* $t\longmapsto\prod_{p\leq M_\delta}h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n},p^{-c}\right)$.

Preuve. Voir le lemme 6 du chapitre 2.

Il reste maintenant à vérifier que l'accumulation de zéros $t_{m,p}$ se trouvant dans $\Xi_{u,\eta}$ n'est pas compensée par d'éventuels pôles provenant des ζ-facteurs de $\prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{\ell=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\left(s_l^0+t\theta_\ell\right)+c\langle\beta,\alpha^{n+1}\rangle\right)\right]^{-\gamma(\beta)}$ qui apparaît dans l'écriture du théorème 15.

Remarquons tout d'abord que, puisque ζ_{M_δ} a exactement les mêmes zéros ou pôle que la fonction ζ de Riemann, les éventuels pôles qui pourraient compenser les précédents zéros $t_{m,p}$ sont de la forme :

$$t\left(\beta,\rho\right)=\frac{\rho-\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle},$$

où $\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}$ et ρ est un zéro ou un pôle de ζ.

Dans ce qui suit on va montrer que, quitte à perturber $\mathbf{s}^{0^{(n)}}\in\mathcal{B}\cap\partial W_c(0)$, il n'y a au plus qu'un nombre fini de tels $t(\beta,\rho)$ dans la région $\Xi_{u,\eta}$; et par conséquent ils peuvent pas compenser l'accumulation de $t_{m,p}\in\Xi_{u,\eta}$.

On va donc considérer pour tout $\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}$, pour tout nombre premier p et tout ρ zéro ou pôle de ζ la quantité suivante :

$$h\left(p^{-s_1^0-t(\beta,\rho)\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t(\beta,\rho)\theta_n},p^{-c}\right);$$

et on va montrer que pour presque tous les $t(\beta,\rho)\in\Xi_{u,\eta}$ (tous sauf un nombre fini) et pour tout nombre premier p assez grand ($p>p_0$ où p_0 est une constante absolue) on a :

$$h\left(p^{-s_1^0-t(\beta,\rho)\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t(\beta,\rho)\theta_n},p^{-c}\right)\neq 0.$$

Ecrivons :

$$h\left(p^{-s_1^0-t(\beta,\rho)\theta_1},...,p^{-s_n^0-t(\beta,\rho)\theta_n},p^{-c}\right) = 1+\sum_{k=1}^{r} a_k p^{-\langle \mathbf{s}^0,\alpha_k\rangle-\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\rangle\left(\frac{\rho-\sum_{j=1}^r\beta_j\langle \mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}\right)} = 1+\sum_{k=1}^{r} a_k p^{\lambda_k(\sigma^0)}$$

où

$$\lambda_k(\sigma^0)=\lambda_{\theta,\beta,k}(\sigma^0)=-u_k(\sigma^0)-v_k;$$

avec

$$u_k(\sigma^0)=u_{\theta,\beta,k}(\sigma^0)=\langle\sigma^0,\alpha_k\rangle-\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\rangle\frac{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}{\sum_{j=1}^r\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}$$

et

$$v_k=v_{\theta,\beta,k,\rho}=\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\rangle\left(\frac{\rho-i\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\gamma^{0(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}{\sum_{j=1}^r\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}\right)+i\langle\gamma^{0(n)},\alpha_k^{(n)}\rangle; \tag{5.31}$$

est indépendant de σ^0.

Précisons la dépendance de u_k en σ^0.

En effet, le $(n+1)$-uplet σ^0 a ici deux contraintes : $\sigma^0_{n+1}=c$ et $\langle\sigma^0,\alpha_e\rangle=0$. On peut donc ramener ce $(n+1)$-uplet $\widetilde{\sigma}^0=\left(\widetilde{\sigma}^0_1,\dots,\widetilde{\sigma}^0_{n-1}\right)$ à un $(n-1)$-uplet sans contrainte en posant (en supposant sans perte de généralité que $\alpha_e^n\neq 0$) :

$$\begin{cases}\sigma^0_\ell=\widetilde{\sigma}^0_\ell & (\ell\in\{1,\dots,n-1\}),\\ \sigma^0_n=-\dfrac{1}{\alpha_e^n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_e^i\widetilde{\sigma}^0_i+c\ \alpha_e^{n+1}\right) & .\end{cases}$$

De cette façon on obtient :

$$\begin{aligned}u_k(\widetilde{\sigma}^0) &= \sum_{i=1}^{n-1}\widetilde{\sigma}^0_i\left(\alpha_k^i-\sum_{j=1}^r\beta_j\alpha_j^i\frac{\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\rangle}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\left(\alpha_k^n-\sum_{j=1}^r\beta_j\alpha_j^n\frac{\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\rangle}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}\right)\right)\\ &\quad +c\left(\alpha_k^{n+1}-\sum_{j=1}^r\beta_j\alpha_j^{n+1}\frac{\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\rangle}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}-\frac{\alpha_e^{n+1}}{\alpha_e^n}\left(\alpha_k^n-\sum_{j=1}^r\beta_j\alpha_j^n\frac{\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\rangle}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}\right)\right)\\ &= u_k(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}}+u_{k\,\mathrm{aff}};\end{aligned}$$

où

$$u_k(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}}:=\sum_{i=1}^{n-1}\widetilde{\sigma}^0_i\left(\alpha_k^i-\sum_{j=1}^r\beta_j\alpha_j^i\frac{\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\rangle}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\left(\alpha_k^n-\sum_{j=1}^r\beta_j\alpha_j^n\frac{\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\rangle}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}\right)\right) \tag{5.32}$$

et

$$u_{k\mathrm{aff}} := c\left(\alpha_k^{n+1} - \sum_{j=1}^{r}\beta_j\alpha_j^{n+1}\frac{\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\rangle}{\sum_{j=1}^{r}\beta_j\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle} - \frac{\alpha_e^{n+1}}{\alpha_e^n}\left(\alpha_k^n - \sum_{j=1}^{r}\beta_j\alpha_j^n\frac{\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\rangle}{\sum_{j=1}^{r}\beta_j\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}\right)\right). \tag{5.33}$$

On définit alors la relation d'équivalence $\mathcal{R}_{\beta,\theta}$ suivante sur les α_k

$$\alpha_k\ \mathcal{R}_{\beta,\theta}\ \alpha_{k'} \iff \begin{array}{l}\text{pour tout } \widetilde{\sigma}^0 \text{ tel que } \mathbf{s}^{0(n)} \in \mathcal{B}\\ u_{k\mathrm{vect}}(\widetilde{\sigma}^0) = u_{k'\mathrm{vect}}(\widetilde{\sigma}^0)\end{array}$$

Autrement dit $\alpha_k\ \mathcal{R}_{\beta,\theta}\ \alpha_{k'}$ si et seulement si pour tout $i \in \{1,\ldots,n-1\}$:

$$\left(\alpha_k^i - \alpha_{k'}^i\right) - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\left(\alpha_k^n - \alpha_{k'}^n\right) - \frac{\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)} - \alpha_{k'}^{(n)}\rangle}{\sum_{j=1}^{r}\beta_j\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}\left(\sum_{j=1}^{r}\beta_j\left(\alpha_j^i - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\alpha_j^n\right)\right) = 0. \tag{5.34}$$

Remarquons que

$$\sum_{j=1}^{r}\beta_j\left(\alpha_j^i - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\alpha_j^n\right) = \sum_{j\notin\Lambda_e}\beta_j\left(\alpha_j^i - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\alpha_j^n\right).$$

De plus, il est important de noter que bien que l'ensemble des $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ tels que $\gamma(\beta) \neq 0$ soit infini, l'ensemble

$$E := \{\beta_j \mid j \notin \Lambda_e, \gamma(\beta) \neq 0, \Re(t(\beta,\rho)) \geq 0\} \tag{5.35}$$

est fini.

En effet, puisque les $t(\beta,\rho)$ qui pourraient compenser les zéros $t_{m,p}$ sont nécessairement de partie réelle positive, on a

$$\Re(t(\beta,\rho)) = \frac{\Re(\rho) - \sum_{j\notin\Lambda_e}\beta_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}{\sum_{j=1}^{r}\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle} \geq 0; \tag{5.36}$$

et par conséquent

$$\sum_{j\notin\Lambda_e}\beta_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle \leq \Re(\rho) \leq 1;$$

ce qui donne que (5.35) est un ensemble fini puisque pour tout $j \notin \Lambda_e$, $\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle > 0$.

Par conséquent la quantité $\sum_{j\notin\Lambda_e}\beta_j\left(\alpha_j^i - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\alpha_j^n\right)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs lorsque l'on fait varier β.

Donnons quelques précisions concernant la relation $\mathcal{R}_{\beta,\theta}$.

Si on suppose que $\sum_{j=1}^{r}\beta_j\alpha_j^{(n)} \notin \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$, il existe alors $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ tel que $\sum_{j\notin\Lambda_e}\beta_j\left(\alpha_j^i - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\alpha_j^n\right) \neq 0$ et l'égalité (5.34) n'est possible que si

$$\frac{\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)}\rangle}{\sum_{j=1}^{r}\beta_j\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle} = \frac{(\alpha_k^i-\alpha_{k'}^i)-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}(\alpha_k^n-\alpha_{k'}^n)}{\sum_{j\notin\Lambda_e}\beta_j\left(\alpha_j^i-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\alpha_j^n\right)}. \tag{5.37}$$

Puisque par (5.35) $\left\{\frac{(\alpha_k^i-\alpha_{k'}^i)-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}(\alpha_k^n-\alpha_{k'}^n)}{\sum_{j\notin\Lambda_e}\beta_j\left(\alpha_j^i-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\alpha_j^n\right)} \mid \beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}\right\}$ est un ensemble fini et que $\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle > 0$ pour tout $j\in\{1,\ldots,r\}$, l'identité (5.37) ne peut pas être vérifiée pour $\|\beta\|$ assez grand si $\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)}\rangle \neq 0$ ou $(\alpha_k^i-\alpha_{k'}^i)-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}(\alpha_k^n-\alpha_{k'}^n)\neq 0$ ($\|\beta\|> B_0$ où B_0 est une constante absolue) car le membre de gauche est non nul et tend vers 0 lorsque $\|\beta\|$ tend vers l'infini.

Pour $\|\beta\|> B_0$, on a donc nécessairement $\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)}\rangle = 0$ et $(\alpha_k^i-\alpha_{k'}^i)-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}(\alpha_k^n-\alpha_{k'}^n)=0$ pour les $i\in\{1,\ldots,n-1\}$ tels que $\sum_{j\notin\Lambda_e}\beta_j\left(\alpha_j^i-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\alpha_j^n\right)\neq 0$.

Pour les autres indices i tels que $\sum_{j\notin\Lambda_e}\beta_j\left(\alpha_j^i-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\alpha_j^n\right) = 0$, l'identité (5.34) fournit également $(\alpha_k^i-\alpha_{k'}^i)-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}(\alpha_k^n-\alpha_{k'}^n)=0$; on obtient ainsi que $\alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)}\in\mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$. Et si on écrit $\alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)} = q\alpha_e^{(n)}$ ($q\in\mathbf{Q}$), l'identité $\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)}\rangle = 0$ donne immédiatement $q=0$ puisque $\langle\theta^{(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle\neq 0$; et donc $\alpha_k^{(n)}=\alpha_{k'}^{(n)}$.

Si maintenant $\sum_{j=1}^{r}\beta_j\alpha_j^{(n)}\in\mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$, l'égalité (5.34) devient :

$$\forall i\in\{1,\ldots,n-1\},\ \left(\alpha_k^i-\alpha_{k'}^i\right)-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}(\alpha_k^n-\alpha_{k'}^n)=0. \tag{5.38}$$

Mais alors (5.38) donne $\alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)}\in\mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$.

La relation d'équivalence $\mathcal{R}_{\beta,\theta}$ se ramène donc à la relation suivante pour β assez grand ($\|\beta\|> B_0$) :

$$\alpha_k\ \mathcal{R}_{\beta,\theta}\ \alpha_{k'} \implies \begin{cases}\alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)}\in\mathbf{Q}\sum_{j=1}^{r}\beta_j\alpha_j^{(n)}\\ \alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)}\in\mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}.\end{cases}$$

On note $[k_0]$ la classe d'équivalence de k_0 et on considère un ensemble $\mathcal{V}$ dont les éléments sont un représentant de chacune des classes d'équivalence.

Si l'on considère maintenant $\sigma^0 \longmapsto h\left(p^{-s_1^0-t(\beta,\rho)\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t(\beta,\rho)\theta_n},p^{-c}\right)$ comme une fonction de $(n-1)$ variables $f_{p,\rho,\beta}(\widetilde{\sigma}_1^0,\ldots,\widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$, on peut écrire :

$$f_{p,\rho,\beta}(\widetilde{\sigma}_1^0,\ldots,\widetilde{\sigma}_{n-1}^0) = 1 + \sum_{k_0\in\mathcal{V}}\left(\sum_{\alpha_k\in[k_0]} a_k p^{-v_k-u_{k\,\mathrm{aff}}}\right) p^{-u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}}};$$

où les formes linéaires $u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}}$ sont ici deux à deux distinctes.

Remarque 16. On pourra noter ici une différence notoire par rapport au chapitre 2. En effet, contrairement au chapitre 2 les $u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)$ ne sont plus linéaires mais affines en $\widetilde{\sigma}^0$ à cause du fait que la composante s_{n+1} de $\mathbf{s}$ est fixée égale à c.

Or pour utiliser des arguments de généricité au niveau de $\widetilde{\sigma}^0$, il est nécessaire de considérer une relation d'équivalence sur les $u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}}$ et non pas sur les $u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)$; ce sont ces complications qui font qu'il n'est pas possible a priori de reprendre tels quels les arguments du chapitre 2 dans ce qui suit.

Et puisqu'on a préalablement traité complètement le cas où $[h]_e$ n'est pas cyclotomique, on verra dans la suite qu'il est possible de surmonter ces complications en se réduisant au cas où $\beta \in B_e$.

Lemme 13. *On a pour $|\boldsymbol{X}^{\alpha_j}| < C$ $(j \in \Lambda_e)$ (C étant la constante définie en (2.11) page 36), l'égalité suivante :*

$$[h]_e(\boldsymbol{X}) = \prod_{\beta\in B_e}\left(1 - \boldsymbol{X}^{\sum_{j\in\Lambda_e}\beta_j\alpha_j}\right)^{\gamma(\beta)},$$

où le membre de droite converge absolument, et chaque $\gamma(\beta)$ est la puissance entière pour le facteur indexé par β dans l'expansion de $h(\boldsymbol{X})$ qui est donné par le corollaire 2.3.2 page 36.

Preuve. Posons tout d'abord $d_e = \#\Lambda_e$, et notons l'ensemble correspondant $\Lambda_e = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_{d_e}\}$. On applique alors le corollaire 2.3.2 au polynôme $[h]_e$. Pour la même constante C définie en (2.11) on a la convergence absolue de l'expansion cyclotomique infinie correspondant à $[h]_e(\mathbf{X})$ à condition que chaque $|\mathbf{X}^{\alpha_j}| < C$. Notons qu'ici le produit de cette expansion cyclotomique est pris sur tous les $\tilde{\beta} \in \mathbf{N}^{d_e} - \{\mathbf{0}\}$. A chacun de ces $\tilde{\beta}$ on peut lui associer un unique $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_r) \in B_e$ tel que $j_k \in \Lambda_e$ implique $\beta_{j_k} = \tilde{\beta}_k$, pour chaque k. Par conséquent, $\sum_{j=1}^r \beta_j\alpha_j = \sum_{i=1}^{d_e}\tilde{\beta}_i\alpha_{j_i}$ si $\beta \in B_e$. Concernant les puissances, on conclut que

$$\gamma(\tilde{\beta}) = \gamma(\beta) \qquad \text{pour chaque } \beta \in B_e,$$

puisque l'expression de $\gamma(\tilde{\beta})$ du lemme 2 page 32 coincide avec celle de $\gamma(\beta)$ car les $\beta \in B_e$ correspondent exactement aux $\tilde{\beta}$ avec la réindexation que l'on vient de définir. Ceci termine la preuve. □

Remarque 17. Puisque l'on suppose ici que $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$ et donc que $[h]_e$ est cyclotomique, le lemme 13 précédent permet de conclure qu'il n'y a qu'un nombre fini de puissances $\gamma(\beta) \neq 0$ telle que $\beta \in B_e$.

Lemme 14. *Quitte à perturber $\boldsymbol{s}^{0^{(n)}} \in \mathcal{B} \cap \partial W_c(0)$, pour presque tout $t(\beta, \rho) \in \Xi_{u,\eta}$ (i.e. tous sauf un nombre fini) :*

$$h\left(p^{-s_1^0 - t(\beta,\rho)\theta_1}, ..., p^{-s_n^0 - t(\beta,\rho)\theta_n}, p^{-c}\right) \neq 0 \text{ pour tout nombre premier } p.$$

Preuve. Tout d'abord, puisque les $\beta \in B_e$ tels que $\gamma(\beta) \neq 0$ sont en nombre fini d'après la remarque 17 précédente, et puisque les ρ tels que

$$\begin{cases} t(\beta, \rho) \in \Xi_{u,\eta} \\ \beta \in B_e \end{cases}$$

sont nécessairement également en nombre fini, les $t(\beta, \rho)$ tels que $\beta \in B_e$ et $\gamma(\beta) \neq 0$ sont donc en nombre fini.

Il suffit donc de considérer à partir de maintenant les $\beta \notin B_e$.

On veut maintenant montrer que quitte à perturber $\mathbf{s}^0$ $f_{p,\beta,\rho}(\widetilde{\sigma}^0)$ est non nulle pour tout p.

Ecrivons :

$$f_{p,\rho,\beta}(\widetilde{\sigma}^0_1, \ldots, \widetilde{\sigma}^0_{n-1}) = 1 + \sum_{k_0 \in \mathcal{V}} \left(\sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k - u_{k\,\mathrm{aff}}} \right) p^{-u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}}};$$

où les formes linéaires $u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}}$ sont ici deux à deux distinctes.

Montrons maintenant qu'aucun $u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}}$ pour $k_0 \in \mathcal{V}$ n'est nul pour $\beta \notin B_e$ assez grand.

Soit donc $k_0 \in \mathcal{V}$.

D'après l'expression de $u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}}$ donnée en (5.32), on a

$$u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}} = 0 \Longleftrightarrow \alpha^{(n)}_{k_0} - \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha^{(n)}_j \frac{\langle \theta^{(n)}, \alpha^{(n)}_{k_0} \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta'^{n)}, \alpha^{(n)}_j \rangle} \in \mathbf{Q}\alpha^{(n)}_e. \tag{5.39}$$

Supposons donc qu'il existe une suite $(\beta_m)_{m \in \mathbf{N}}$ telle que pour tout m il existe ρ_m tel que $t(\beta_m, \rho_m) \in \Xi_{u,\eta}$ et telle que $\beta_m \notin B_e$ pour tout m et $\|\beta_m\| \to +\infty$ lorsque $m \to +\infty$ et vérifiant pour tout m

$$\alpha^{(n)}_{k_0} - \sum_{j=1}^r \beta_{mj} \alpha^{(n)}_j \frac{\langle \theta^{(n)}, \alpha^{(n)}_{k_0} \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_{mj} \langle \theta'^{n)}, \alpha^{(n)}_j \rangle} \in \mathbf{Q}\alpha^{(n)}_e. \tag{5.40}$$

Puisque (5.35) est un ensemble fini on a

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{\sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j^{(n)}}{\sum_{j=1}^r \beta_{mj}\langle\theta'^{n)},\alpha_j^{(n)}\rangle} = \lim_{m\to+\infty} \frac{\sum_{j\in\Lambda_e} \beta_{mj}\alpha_j^{(n)}}{\sum_{j\in\Lambda_e} \beta_{mj}\langle\theta'^{n)},\alpha_j^{(n)}\rangle} = \frac{\alpha_e^{(n)}}{\langle\theta^{(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}.$$

Par passage à la limite dans (5.40) on obtient donc nécessairement que $\alpha_{k_0}^{(n)} \in \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$.

Par conséquent, toujours d'après l'identité (5.40), on a que pour tout m :

$$\sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j^{(n)} \in \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}.$$

Il existe donc $q_m \in \mathbf{N}^*$ tel que $\sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j^{(n)} = q_m\widehat{\alpha}_e^{(n)}$.

Comme $c \in \mathbf{Z}^*$ on a d'une part :

$$\begin{aligned}\langle\sigma^0, \textstyle\sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j\rangle &= \langle\sigma^{0(n)}, \displaystyle\sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j^{(n)}\rangle + c\sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j^{n+1} \\ &= -cq_m\sum_{j=1}^r \beta_{mj}\widehat{\alpha}_e^{\,n+1} + c\sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j^{n+1} \in \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

D'un autre coté on sait que $\forall j\ \langle\sigma^0,\alpha_j\rangle \geq 0$ avec inégalité stricte pour $j \notin \Lambda_e$. On sait aussi que $\beta_m \notin B_e$ implique qu'il existe $j \notin \Lambda_e$ tel que $\beta_{mj} > 0$. On en déduit que

$$\langle\sigma^0, \sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j\rangle = \sum_{j=1}^r \beta_{mj}\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle = \sum_{j\notin\Lambda_e} \beta_{mj}\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle > 0.$$

Par conséquent on a $\langle\sigma^0, \sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j\rangle \geq 1$.

Or puisque $t(\beta_m,\rho_m) \in \Xi_{u,\eta}$ on doit avoir :

$$0 < \Re(t(\beta_m,\rho_m)) = \frac{\Re(\rho_m) - \langle\sigma^0, \sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j\rangle}{\langle\theta, \sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j\rangle};$$

et donc $\Re(\rho_m) > 1$; ce qui est impossible et prouve que $u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\text{vect}}$ pour $k_0 \in \mathcal{V}$ n'est nul pour $\beta \notin B_e$ assez grand.

Revenons maintenant à $f_{p,\rho,\beta}(\widetilde{\sigma}_1^0,\ldots,\widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$ et montrons que $f_{p,\rho,\beta}(\widetilde{\sigma}_1^0,\ldots,\widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$ est non nul quitte à perturber $\widetilde{\sigma}^0$.

Tout d'abord, si tous les $\sum_{\alpha_k\in[k_0]} a_k p^{-v_k-u_{k\text{aff}}}$ sont nuls pour $k_0 \in \mathcal{V}$, on obtient alors que $f_{p,\rho,\beta}(\widetilde{\sigma}_1^0,\ldots,\widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$ est une fonction constante égale à $1 \neq 0$ et satisfait l'assertion du lemme.

Sinon, il existe au moins un $k_0 \in \mathcal{V}$ tel que $\sum_{\alpha_k\in[k_0]} a_k p^{-v_k-u_{k\text{aff}}} \neq 0$.

Montrons maintenant que pour ρ et $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ fixé, la fonction $\widetilde{\sigma}^0 \longmapsto f_{p,\beta,\rho}(\widetilde{\sigma}^0_1, \ldots, \widetilde{\sigma}^0_{n-1})$ n'est pas identiquement nulle ; et ceci de façon à assurer le fait ses zéros définissent un ensemble maigre de $\mathbf{R}^n$ (i.e. d'intérieur vide).

Il suffit pour cela de considérer $\mu \in \mathbf{R}^{n-1}$, par exemple de composantes $\mathbf{Q}$-linéairement indépendantes, de sorte que les $u_{k_0}(\mu)_{\mathrm{vect}}$ soient deux à deux distincts pour $k_0 \in \mathcal{V}$.

On pose ensuite :

$$\widetilde{\sigma}^0 = t\mu.$$

Et puisque $u_{k_0}(t\mu)_{\mathrm{vect}} = tu_{k_0}(\mu)_{\mathrm{vect}}$ on obtient ainsi :

$$f_{p,\rho,\beta}(t\mu) = 1 + \sum_{k_0 \in \mathcal{V}} \left(\sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k - u_{k\mathrm{aff}}} \right) \exp\left(-t \log(p) u_{k_0}(\mu)_{\mathrm{vect}}\right).$$

Il suffit alors d'utiliser le fait que les fonctions $\{t \longmapsto \exp\left(-t \log(p) u_{k_0}(\mu)_{\mathrm{vect}}\right)\}_{k_0 \in \mathcal{V}}$ sont linéairement indépendantes puisque les $u_{k_0}(\mu)_{\mathrm{vect}} \in \mathbf{R}$ sont deux à deux distincts ; et par conséquent la fonction $t \longmapsto f_{p,\rho,\beta}(t\mu)$ est non identiquement nulle et par suite la fonction $\widetilde{\sigma}^0 \longmapsto f_{p,\beta,\rho}(\widetilde{\sigma}^0_1, \ldots, \widetilde{\sigma}^0_{n-1})$ est également non identiquement nulle.

On utilise ensuite une variante du théorème de préparation de Weierstrass (détaillée dans le lemme 3 du chapitre 2) pour en déduire que, puisque $f_{p,\beta,\rho}(\widetilde{\sigma}^0_1, \ldots, \widetilde{\sigma}^0_{n-1})$ est non nulle, l'ensemble $f^{-1}_{p,\beta,\rho}(0)$ est d'intérieur vide dans $\mathbf{C}^{n-1}$ et même dans $\mathbf{R}^{n-1}$ (car toute fonction holomorphe sur un ouvert $U \subseteq \mathbf{C}^n$ nulle sur $U \cap \mathbf{R}^n$ est nécessairement nulle sur U).

On pose alors :

$$M = \bigcup_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}, p, \rho | \zeta(\rho) = 0} f^{-1}_{p,\beta,\rho}(0).$$

Cet ensemble M, étant une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide dans $\mathbf{R}^{n-1}$, est également d'intérieur vide dans $\mathbf{R}^{n-1}$ d'après le théorème de Baire.

Pour conclure, il est donc possible de choisir $\widetilde{\sigma}^0 \notin M$ de sorte que la fonction $t \longmapsto Z\left(\mathbf{s}^0 + t\theta\right)$ admette une accumulation de zéros dans $\Xi_{u,\eta}$ sans qu'ils soient compensés par des singularités $t(\beta, \rho)$; ce qui termine la preuve de ce lemme et la preuve du théorème 12.

$\square$

5.4 Preuve du théorème 13.

Dans cette section on veut montrer le théorème 13 ; et pour cela on localise dans la preuve du théorème 12 précédente les endroits où l'on a utilisé l'hypothèse (H).

Dans la section 5.3 on a considéré un vecteur α_e ($e \in \{1,\ldots,r\}$) tel que $\alpha_e^{(n)}$ détermine le vecteur polaire d'une face $\mathcal{F}(\alpha_e^{(n)}) \subseteq \partial W_c(0)$.

On peut remarquer dès maintenant que chacune des faces de $\partial W_c(0)$ est déterminée par un vecteur polaire de la forme $\alpha_j^{(n)}$ pour un certain j ; et si en particulier $\alpha_j^{(n)} \in \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$, alors le vecteur α_j détermine une face de $\partial W_c(0)$ seulement si $\alpha_j = \alpha_e$.

Ayant donc fixé ce vecteur α_e, on a considéré un point $\mathbf{s}^{0(n)}$ se trouvant sur cette face $\mathcal{F}(\alpha_e^{(n)})$ (i.e. tel que $\langle \sigma, \alpha_e \rangle = 0$ et $\langle \sigma, \alpha_j \rangle \geq 0$ pour tout $j \in \{1,\ldots,r\}$).

On a alors eu besoin du fait que le vecteur $\alpha_{e'}$, choisi de sorte que $\langle \sigma^0, \alpha_{e'} \rangle$ soit minimal parmi les $\langle \sigma^0, \alpha_{j_0} \rangle > 0$ vérifiant $\sum_{\{j:\alpha_j-\alpha_{j_0}\in\mathbf{Q}\alpha_e\}} a_j p^{-i\langle \gamma^{0(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle} c_{k,0}^{p\;\langle \theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle} \neq 0$ (voir (5.28) page 112), satisfasse la condition suivante :

$$\alpha_{e'}^{(n)} \notin \alpha_e^{(n)}.$$

C'est uniquement pour assurer cette propriété que l'on a eu besoin de l'hypothèse (H) dans la preuve du théorème 12.

Biensûr, cette condition n'est pas a priori vérifiée si on ne suppose plus l'hypothèse (H).

Mais il faut noter que le résultat que l'on veut démontrer ici est plus faible que le théorème 12. En effet, on veut prouver le fait qu'on ne peut pas translater la frontière $\partial W_c(0)$ globalement jusqu'à $\partial W_c(\delta)$ pour tout $\delta < 0$ si h n'est pas cyclotomique.

Et par conséquent, il est possible ici de déplacer σ^0 sur la face $\mathcal{F}(\alpha_e^{(n)})$ de $\partial W_c(0)$, car ici σ^0 n'est plus contraint à rester dans un voisinage d'un point de $\mathcal{F}(\alpha_e^{(n)})$ contrairement à la section 5.3 précédente.

On sait d'autre part d'après l'hypothèse (5.1) que l'ensemble

$$\mathcal{E}_e := \{\alpha_j \mid \alpha_j^{(n)} \notin \alpha_e^{(n)}\} \neq \emptyset.$$

Montrons maintenant qu'il est possible d'avoir $\alpha_{e'} \in \mathcal{E}_e$ quitte à déplacer le point $\mathbf{s}^{0(n)}$ sur $\mathcal{F}(\alpha_e^{(n)})$.

Considérons tout d'abord la quantité $\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle$ pour tous les vecteurs $\alpha_j \notin \mathcal{E}_e$ (i.e. tels que $\alpha_j^{(n)} \in \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$). Pour ces α_j, il existe $q_j \in \mathbf{Q}$ tel que $\alpha_j^{(n)} = q_j \alpha_e^{(n)}$, et par conséquent :

$$\begin{aligned} 0 < \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle &= \langle \sigma^{0(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle + c\ \alpha_j^{n+1} \\ &= q_j \langle \sigma^{0(n)}, \alpha_e^{(n)} \rangle + c\ \alpha_j^{n+1} \\ &= c\left(\alpha_j^{n+1} - q_j \alpha_e^{n+1}\right) \text{ car } \langle \sigma^0, \alpha_e \rangle = \langle \sigma^{0(n)}, \alpha_e^{(n)} \rangle + c\ \alpha_e^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi on observe que $\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle$ pour $\alpha_j \notin \mathcal{E}_e$ ne dépend pas de $\sigma^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e^{(n)})$.

On pose alors

$$\epsilon_0 := \min_{\alpha_j \notin \mathcal{E}_e} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle = \min_{\alpha_j \notin \mathcal{E}_e} \left(c \left(\alpha_j^{n+1} - q_j \alpha_e^{n+1} \right) \right) > 0$$

(ϵ_0 ne dépend pas de $\sigma^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e^{(n)})$).

D'après l'hypothèse (5.1) on sait que $\partial W_c(0)$ n'a pas qu'une seule face car les $\alpha_j \neq \alpha_e$ tels que $\alpha_j^{(n)} \in \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$ ne définissent aucune face de $\partial W_c(0)$.

Il existe donc nécessairement un vecteur $\alpha_{j_1} \in \mathcal{E}_e$ tel que $\mathcal{F}(\alpha_{j_1}^{(n)})$ soit une face de $\partial W_c(0)$ d'intersection non vide avec $\mathcal{F}(\alpha_e^{(n)})$. En particulier $\mathcal{F}(\alpha_e^{(n)}) \cap \mathcal{F}(\alpha_{j_1}^{(n)})$ est aussi une face de $\partial W_c(0)$ de dimension strictement inférieure.

Et l'hypothèse (5.2) assure le fait que $\sum_{\{j : \alpha_j - \alpha_{j_1} \in \mathbf{Q}\alpha_e\}} a_j p^{-i\langle \gamma^{0(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} c_{k,0}^{p\ \langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} \neq 0$.

Pour tout $\epsilon > 0$, on peut donc trouver un point $\mathbf{s}^{0(n)} \in \mathcal{F}(\alpha_e^{(n)})$ vérifiant (5.4) tel que

$$0 < \langle \sigma^0, \alpha_{j_1} \rangle < \epsilon.$$

Et ceci est en particulier vrai si $\epsilon < \epsilon_0$.

Maintenant, e' étant choisi de sorte que $\langle \sigma^0, \alpha_{e'} \rangle > 0$ soit minimal parmi les $\langle \sigma^0, \alpha_{j_0} \rangle > 0$ vérifiant $\sum_{\{j : \alpha_j - \alpha_{j_0} \in \mathbf{Q}\alpha_e\}} a_j p^{-i\langle \gamma^{0(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} c_{k,0}^{p\ \langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} \neq 0$, on a :

$$\langle \sigma^0, \alpha_{e'} \rangle \leq \langle \sigma^0, \alpha_{j_1} \rangle < \epsilon_0 = \min_{\alpha_j \notin \mathcal{E}_e} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle.$$

On a donc nécessairement $\alpha_{e'}^{(n)} \notin \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$; ce qui permet de réutiliser les arguments utilisés dans la section 5.3 pour prouver le théorème 13.

Remarque 18. Il faut noter que l'hypothèse (5.1) est absolument nécessaire pour assurer comme dans l'argumentation présentée précédemment l'existence d'une direction θ dans laquelle les zéros ou pôles de $Z(\mathbf{s})$ s'accumulent.

Considérons en effet l'exemple suivant :

$$h(X, Y, Z) = 1 + XY + X^2Y^2Z = 1 + \mathbf{X}^{\alpha_1} + \mathbf{X}^{\alpha_2} \in \mathbf{Z}[X, Y, Z];$$

où $\alpha_1 = (1, 1, 0)$ et $\alpha_2 = (2, 2, 1)$;

et le produit eulérien correspondant (en posant ici $c = 1$) :

$$Z(s_1, s_2) = \prod_p h(p^{-s_1}, p^{-s_2}, p^{-1}).$$

Observons en particulier $t \longmapsto Z(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ avec $\mathbf{s}^0 = (1, -1, 1) \in \partial W(0) \cap \{s_3 = 1\}$ vérifiant $\langle \mathbf{s}^0, \alpha_1 \rangle = 0$ et $\theta = (\theta_1, \theta_2, 0) \in \mathbf{Q}^3 \cap \{\theta_3 = 0\}$.

On a alors

$$W_{\mathbf{s}^0,\theta}(X, Y) = 1 + X^{\langle \mathbf{s}^0, \alpha_1 \rangle} Y^{\langle \theta, \alpha_1 \rangle} + X^{\langle \mathbf{s}^0, \alpha_2 \rangle} Y^{\langle \theta, \alpha_2 \rangle} = 1 + Y^{\theta_1 + \theta_2} + XY^{2\theta_1 + 2\theta_2};$$

et vérifie $W_{s^0,\theta}(p^{-1},p^{-t}) = h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},p^{-s_2^0-t\theta_2},p^{-1}\right)$.

En reprenant les notations précédentes, les séries de Puiseux $\Omega_k(X)$ vérifiant $W_{\mathbf{s}^0,\theta}(p^{-1},\Omega_k(p^{-1})) = 0$ correspondent aux branches de $1+T+XT^2$ (en posant $T := Y^{\theta_1+\theta_2}$).

Or on vérifie sans difficulté qu'il n'existe pas de branche vérifiant $|\Omega_k(X)| < 1$ pour $|X|$ petit.

Il n'y a donc pas d'accumulation de zéros de $t \longmapsto h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},p^{-s_2^0-t\theta_2},p^{-1}\right)$ (de la forme $t_{m,p} = -\frac{\log\left(\Omega_k(p^{-1})\right)}{\log(p)} + \frac{2\pi mi}{\log(p)}$; $m \in \mathbf{Z}$, p premier) de partie réelle positive au voisinage de $\Re(t) = 0$.

De plus, il n'y pas non plus d'accumulation de zéros ou pôles provenant du facteur $t \longmapsto \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^n \langle\beta,\alpha^l\rangle(s_l^0+t\theta_l) + c\langle\beta,\alpha^{n+1}\rangle\right)\right]^{-\gamma(\beta)}$.

En effet, ces zéros ou pôles sont de la forme :

$$t(\beta,\rho) = \frac{\rho-\beta_1\langle\mathbf{s}^0,\alpha_1\rangle-\beta_2\langle s^0,\alpha_2\rangle}{\beta_1\langle\theta,\alpha_1\rangle+\beta_2\langle\theta,\alpha_2\rangle} = \frac{\rho-\beta_2}{(\beta_1+2\beta_2)(\theta_1+\theta_2)};$$

où $\beta = (\beta_1,\beta_2) \in \mathbf{N}^2$ et ρ est un zéro ou pôle de la fonction zêta de Riemann.

Si donc $\beta_2 > 0$ on aura $\Re(t(\beta,\rho)) \leq 0$; les $t(\beta,\rho)$ de partie réelle strictement positive sont donc nécessairement tels que $\beta_2 = 0$.

Or on sait (d'après ce qui a été fait au chapitre 2) que ces zéros ou pôles ne proviennent que d'un nombre fini de ζ-facteurs de $\prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^{n+1}\langle\beta,\alpha^l\rangle s_l\right)\right]^{-\gamma(\beta)}$ (qui correspondent à la factorisation cyclotomique du polynôme $1+Y^{\theta_1+\theta_2}$) ; et par conséquent ces zéros ou singularités sont isolés et ne s'accumulent pas au voisinage à droite de $\partial W(0)$.

Finalement, cet exemple montre qu'il n'y a pas toujours accumulation de zéros ou pôles au voisinage de $\partial W(0)$; il faudra donc développer de nouveaux outils si l'on veut espérer obtenir un résultat dans la direction de la conjecture 2.

5.5 Preuve du théorème 14.

Pour établir le théorème 14, il suffit de réécrire la fonction zêta d'Igusa sous la forme d'un produit eulérien uniforme associé à un certain polynôme ; et on vérifiera que ce polynôme vérifie bien toutes les conditions du théorème 12.

Ecrivons donc pour $\sigma_i > 1$ ($i = 1,\ldots,n$) :

$$\begin{aligned}
Z^{\mathrm{ring}}(s_1,\ldots,s_n;\mathbf{Z}[T,T^{-1}]) &= \sum_{m_1,\ldots,m_n\geq 1}\frac{\varphi(m_1\cdots m_n)}{m_1^{s_1}\cdots m_n^{s_n}}\\
&= \prod_p\left(\sum_{\nu\in\mathbf{N}^n}\frac{\varphi(p^{\|\nu\|})}{p^{\langle\nu,\mathbf{s}\rangle}}\right)\\
&= \prod_p\left(1+\sum_{\nu\in\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\}}\frac{\left(p^{\|\nu\|}-p^{\|\nu\|-1}\right)}{p^{\langle\nu,\mathbf{s}\rangle}}\right)\\
&= \prod_p\left(1+\left(\sum_{\nu\in\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\}}\frac{p^{\|\nu\|}}{p^{\langle\nu,\mathbf{s}\rangle}}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)\right).
\end{aligned}$$

Or pour $\sigma_i>2$ $(i=1,\ldots,n)$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu\in\mathbf{N}^n}\frac{p^{\|\nu\|}}{p^{\langle\nu,\mathbf{s}\rangle}} &= \sum_{\nu\in\mathbf{N}^n}\frac{1}{\prod_{i=1}^n p^{\nu_i(s_i-1)}}\\
&= \sum_{\nu\in\mathbf{N}^n}\prod_{i=1}^n\left(\frac{1}{p^{(s_i-1)}}\right)^{\nu_i}\\
&= \prod_{i=1}^n\left(\sum_{\nu_i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{p^{(s_i-1)}}\right)^{\nu_i}\right)\\
&= \prod_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{p^{(s_i-1)}}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $\sigma_i>2$ $(i=1,\ldots,n)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
Z^{\mathrm{ring}}(s_1,\ldots,s_n;\mathbf{Z}[T,T^{-1}]) &= \prod_p\left(1+\left(\prod_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{p^{(s_i-1)}}\right)^{-1}-1\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\\
&= \prod_p\prod_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{p^{(s_i-1)}}\right)^{-1}\\
&\quad\left(\prod_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{p^{(s_i-1)}}\right)+\left(1-\prod_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{p^{(s_i-1)}}\right)\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\\
&= \prod_{i=1}^n\zeta\left(s_i-1\right)\prod_p\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\prod_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{p^{(s_i-1)}}\right)\right)\\
&= \prod_{i=1}^n\zeta\left(s_i-1\right)\prod_p\left(1+\sum_{k=1}^n\sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,n\},\\ \#I=k}}\frac{(-1)^k}{p^{\left(\sum_{l\in I}s_l\right)-k+1}}\right).
\end{aligned}$$

Etant donné que le produit fini de fonctions zêta $\prod_{i=1}^{n} \zeta(s_i - 1)$ est méromorphe sur tout $\mathbf{C}^n$, il suffit de déterminer le domaine maximal de méromorphie du produit :

$$\mathbf{s} \longmapsto \prod_p \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\}, \\ \# I = k}} \frac{(-1)^k}{p^{\left(\sum_{l \in I} s_l\right) - k + 1}} \right).$$

En établissant le changement de variable $\mathbf{w} = \mathbf{s} - \mathbf{1} = (s_1 - 1, \ldots, s_n - 1)$, on est ramené à considérer le produit :

$$\mathbf{w} \longmapsto \prod_p \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\}, \\ \# I = k}} \frac{(-1)^k}{p^{\left(\sum_{l \in I} w_l\right) + 1}} \right);$$

qui est égal à :

$$\prod_p h(p^{-w_1}, \ldots, p^{-w_n}, p^{-1}),$$

avec

$$h(X_1, \ldots, X_{n+1}) = 1 + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{\# I} \mathbf{X}^{\alpha_I},$$

en posant pour tout $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $\alpha_I^{n+1} = 1$ et pour $l \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{cases} \alpha_I^l = 1 \text{ si } l \in I \\ \alpha_I^l = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Pour terminer, on vérifie sans difficulté que h satisfait les conditions du théorème 12 ; ce qui complète la preuve du théorème 14.

Appendices

Annexe A

Preuves alternatives du résultat principal dans des cas particuliers.

Dans §2.3.2 on a montré que $Z(\mathbf{s})$ se prolonge de façon méromorphe à partir de son domaine de convergence absolu jusque $W(0)$. Dans cette partie on montre qu' aucun prolongement méromorphe n'existe au-delà de la frontière de $W(0)$ à condition que h ne soit pas cyclotomique dans un cas particulier en utilisant des méthodes différentes que celles utilisées dans §2.4.

Comme précédemment on prouve que dans tout voisinage d'un point "générique" $\mathbf{s}^0$ se trouvant sur $\partial W(0)$, il y a une accumulation de pôles ou de zéros de $Z(\mathbf{s})$ lorsque $\mathbf{s}^0$ varie dans une direction appropriée. (Rappelons qu'un point générique de $\partial W(0)$ un élément d'un ensemble dont le complémentaire est d'intérieur vide.)

Le principal intérêt de ce chapitre est de mettre en valeur le rôle de la e-ième partie principale $[h]_e$ de h dans l'accumulation des zéros et des pôles de $Z(\mathbf{s})$ près de $\partial W(0)$. En particulier, lorsque ce $[h]_e$ n'est pas cyclotomique, on peut observer que cette e-ième partie principale de h fournit beaucoup de zéros/pôles (provenant des zéros des facteurs $[h]_e(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n})$ ou des zéros/pôles des ζ-facteurs de A_{M_δ} produits par l'expanson cyclotomique de $[h]_e$ du corollaire 2.3.2) dans tout voisinage de l'hyperplan de $\partial W(0)$ déterminé par α_e.

Dans toute cette partie on supposera que h est un polynôme comme dans §2.1 qui n'est pas cyclotomique et qui ne contient aucun facteur cyclotomique

A.1 Première méthode : lorsque h est irréductible et la e-ième partie principale $[h]_e$ de h n'est pas cyclotomique en considérant les zéros ou pôles provenant des ζ-facteurs.

On considère ici la e-ième partie principale $[h]_e$ de h qui a été définie dans la définition 10.

Bien qu'ici h ne soit pas cyclotomique, il est tout à fait possible le polynôme $[h]_e$ le soit. Mais on supposera ici que ce $[h]_e$ n'est pas cyclotomique.

On pourra noter que la méthode présentée ici ne nécessite aucune hypothèse particulière concernant la face $\mathcal{F}(\alpha_e)$.

Deux faits particuliers qui seront utilisés ultérieurement sont démontrés ici. Le premier assure l'existence d'un certain ensemble infini composé de puissances $\gamma(\beta)$ non nulles, et ce en appliquant le corollaire 2.3.2 au polynôme non cyclotomique $[h]_e$. Une fois cela prouvé, la seconde étape consiste alors à construire un ensemble infini d'entiers dont l'existence est crucial pour ensuite réutiliser un argument dû à Dhalquist. Cet argument affirme qu'un ensemble infini composé d'entiers doit contenir un sous-ensemble infini de "nombres sommets".

Les notations introduites dans §2.4 sont encore utilisées ici.

Lemme 15. *On suppose que $\alpha_e \in$ Supp h est tel que $[h]_e$ n'est pas cyclotomique. Alors, si $\boldsymbol{X}^{\alpha_j} < C$ pour $j \in \Lambda_e$ (C étant la constante définie en (2.11)), on a :*

$$[h]_e(\boldsymbol{X}) = \prod_{\beta \in B_e} \left(1 - \boldsymbol{X}^{\sum_{j \in \Lambda_e} \beta_j \alpha_j}\right)^{\gamma(\beta)},$$

où le membre de droite converge absolument, et chaque $\gamma(\beta)$ est la puissance entière pour le facteur indexé par β dans l'expansion de $h(\boldsymbol{X})$ qui est donné par le corollaire 2.3.2.

Preuve. Posons tout d'abord $d_e = \#\Lambda_e$, et notons l'ensemble correspondant $\Lambda_e = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_{d_e}\}$. On applique alors le corollaire 2.3.2 au polynôme $[h]_e$. Pour la même constante C définie en (2.11) on a la convergence absolue de l'expansion cyclotomique infinie correspondant à $[h]_e(\mathbf{X})$ à condition que chaque $|X_i| < C$. Notons qu'ici le produit de cette expansion cyclotomique est pris sur tous les $\tilde{\beta} \in \mathbf{N}^{d_e} - \{\mathbf{0}\}$. A chacun de ces $\tilde{\beta}$ on peut lui associer un unique $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r) \in B_e$ tel que $j_k \in \Lambda_e$ implique $\beta_{j_k} = \tilde{\beta}_k$, pour chaque k. Par conséquent, $\sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j = \sum_{i=1}^{d_e} \tilde{\beta}_i \alpha_{j_i}$ si $\beta \in B_e$. Concernant les puissances, on conclut que

$$\gamma(\tilde{\beta}) = \gamma(\beta) \qquad \text{pour chaque } \beta \in B_e,$$

puisque l'expression de $\gamma(\tilde{\beta})$ du lemme 2 coincide avec celle de $\gamma(\beta)$ car les $\beta \in B_e$ correspondent exactement aux $\tilde{\beta}$ avec la réindexation que l'on vient de définir. Ceci termine la preuve. $\square$

On conclut immédiatement :

Corollaire A.1.1. Si $[h]_e$ n'est pas cyclotomique, alors l'ensemble

$$\Gamma_e =_{def} \ \{\gamma(\beta) : \beta \in B_e\} - \{0\}.$$

est un sous-ensemble infini de $\mathbf{Z}$.

Posons maintenant $Q = \{q_{j_i}\}_{j_i \in \Lambda_e}$ un sous-ensemble de $\mathbf{N} - \{0\}$. En utilisant la précédente réindexation des éléments de B_e, il vient que

$$\Upsilon_e(Q) =_{def} \ \left\{ \sum_i q_{j_i} \beta_{j_i} : \beta \in B_e \quad \text{et} \quad \gamma(\beta) \in \Gamma_e \right\} \tag{A.1}$$

est un sous-ensemble *infini* de $\mathbf{N}$.

Il convient de rappeler une définition et un résultat qui sont dû à Dhalquist.

Définition 25 (Dhalquist c.f. [8])**.** On considère un ensemble infini Υ composé d'entiers positifs. Pour $v \in \Upsilon$, on écrit :

$$v = \prod p_i^{\omega_i},$$

où $\omega_i \geq 0$ et p_i désigne le i-ième nombre premier.

Alors un nombre $v^* = \prod p_i^{\omega_i^*} \in \Upsilon$ est appelé un *nombre sommet* de Υ s'il existe une suite de nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ (dépendant de v^*) qui vérifie :

$$\sum \lambda_i \omega_i^* > \sum \lambda_i \omega_i,$$

pour tout $v = \prod p_i^{\omega_i} \in \Upsilon$ tel que :

$$v < 2v^*; v \neq v^*.$$

Lemme 16 (Dhalquist [8])**.** *Un ensemble infini* Υ *composé d'entiers positifs contient une infinité de nombres sommets.*

Le second corollaire qui suit est immédiat.

Corollaire A.1.2. Si $[h]_e$ n'est pas cyclotomique, alors pour tout sous-ensemble $Q \subset \mathbf{N} - \{0\}$, $\Upsilon_e(Q)$ contient une infinité de nombres sommets.

A.1.1 Frontière naturelle.

Remarques préliminaires.

Le résultat principal de cette partie est prouvé ici. Comme dans la preuve du théorème 8, le principe de la démonstration consiste à restreindre $Z(\mathbf{s})$ sur une droite complexe L de direction déterminée par un vecteur réel θ qui passe par un point générique $\mathbf{s}^0$ de $W(0)$. Etant donné la paramétrisation $t \to \mathbf{s}^0 + t\theta$ pour L, le choix de θ est fait de sorte qu'il soit possible en particulier d'tiliser le théorème 7 pour ainsi avoir une expression de $Z\big|_L$ sous la forme d'une expansion cyclotomique infinie pour $\Re(t) \geq \delta$ pour tout $\delta > 0$.

On déterminera ici précisément une accumulation de zéros ou de pôles provenant des ζ-facteurs engendrés par l'expansion cyclotomique infinie de $[h]_e$ du corollaire 2.3.2.

Là encore, il suffira de montrer qu'il existe, dans une région bornée (selon le paramètre t), une infinité de zéros ou de pôles de $Z\big|_L$ qui ne sont pas compensés.

La région bornée que l'on va considérer est un rectangle $\Xi_{u,\eta}$ qui dépend de deux paramètres u et $\eta > 0$:

$$\Xi_{u,\eta} : \quad \begin{array}{l} 0 < \Re\left(t\right) < 1 \\ 0 < u < \Im\left(t\right) < u + \eta. \end{array}$$

On choisit également u et η dépendant d'un paramètre $K > 0$ de la façon suivante :

$$\eta > \frac{2}{K}, \quad u > \frac{3}{K}, \quad \text{et} \quad \eta < u - \frac{3}{K}. \tag{A.2}$$

Pour assurer le fait que $Z\big|_L$ puisse bénéficier de l'écriture de $Z(\mathbf{s})$ du théorème 7 pour $\Re(t) \geq \delta$ ($\forall\delta > 0$), une simple contrainte au niveau des composantes de θ suffit. En effet, il suffit de supposer dans un premier temps qu'il existe une unique droite $\langle\alpha_e\rangle$ déterminée par α_e telle que $\langle\sigma^0, \alpha_e\rangle = 0$, autrement dit, cela signifie que quitte à perturber $\mathbf{s}^0$ on suppose qu'il se situe à l'intérieur d'une face de $\partial W(0)$ (et non sur l'intersection de deux faces). Il suffit ensuite d'imposer la condition (2.14) comme dans §2.4 sur θ pour justifier l'écriture de $Z\big|_L$ du théorème 7 pour $\Re(t) \geq \delta$ ($\forall\delta > 0$).

Au cours de la démonstration, deux étapes seront nécessaires. La première consistera à montrer l'existence d'une infinité de zéros ou de pôles potentiels de $Z\big|_L$ dans la région $\Xi_{u,\eta}$. Et on étudiera pour cela en particulier les facteurs zêta qui proviennent de l'écriture de $Z\big|_L$ du théorème 7 et on utilisera des estimations classiques du nombre de zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann dans des rectangles.

La seconde étape s'avère plus délicate. Il faudra en effet détecter les éventuelles compensations qui pourraient se produire entre ces zéros et ces pôles se trouvant dans $\Xi_{u,\eta}$. L'argument utilisé sera une adaptation d'une méthode due à Dhalquist. C'est la raison pour laquelle on a besoin de savoir qu'il existe une infinité de nombres sommets dans un ensemble infini composé d'entiers (que l'on précisera ultérieurement).

Le point important est que l'on peut là encore se restreindre à considérer les points génériques $\mathbf{s}^0$ de $\partial W(0)$. Il est clair en effet que s'il existe en un tel point, une boule ouverte $\mathcal{B}$ telle que $Z\big|_L$ contient une infinité de zéros ou de pôles, alors Z ne peut être méromorphe au-delà de $\partial W(0)$, non seulement au-delà du point $\mathbf{s}^0$, mais en fait, au-delà de tout point $\hat{\mathbf{s}} \in \partial W(0)$(puisque tout voisinage $\mathcal{B}$ d'un tel $\hat{\mathbf{s}}$ contient nécessairement une infinité de points génériques, au-delà desquels, Z n'est pas méromorphe). Ce point est crucial car il est plus facile de travailler avec des sous-ensembles génériques de $\partial W(0)$.

Le sous-ensemble générique de $\partial W(0)$ qui vient d'être évoqué va se construire en différentes étapes. La première consiste à se restreindre aux points s^0 se trouvant à l'intérieur d'une seule face de $\partial W(0)$ (c'est à dire ne se trouvant pas sur l'intersection de deux faces distinctes de $\partial W(0)$). On peut de cette façon focaliser uniquement l'attention sur les facteurs apparaissant dans l'écriture du théorème 7 qui sont indexés par les vecteurs β de l'ensemble B_e. On suppose donc premièrement que

$$\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle = 0 \iff \alpha_j \in \langle \alpha_e \rangle = \mathbf{Q}\alpha_e. \tag{A.3}$$

Les autres étapes de construction de cet ensemble générique apparaîtront dans la preuve du lemme 18 page 138 et dans les preuves des lemmes précédents 7 page 66 et 8 page 71 que nous réutiliserons ici.

L'argument se décomposera en deux étapes : on démontre dans un premier temps l'accumulation de zéros ou de pôles provenant de A_{M_δ} pour $\delta > 0$ (i.e. on considère uniquement les ζ-facteurs de $Z|_L$) ; on détermine ensuite la frontière naturelle de $Z|_L$ en montrant que les singularités provenant de $t \longmapsto A_{M_\delta}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ qui s'accumulent au voisinage à droite de $t = 0$ ne sont pas compensés par des zéros venant de $t \longmapsto \prod_{p \le M_\delta} h\left(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \dots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}\right)$ (c'est à ce niveau qu'on réutilise les lemmes 7 et 8) si le point s^0 est choisi de façon générique dans $\mathcal{F}(\alpha_e) \cap \mathcal{B}$.

Accumulation des zéros ou des pôles provenant de A_{M_δ}. Le résultat que l'on veut prouver ici est le suivant.

Proposition 6. *On suppose que $[h]_e$ n'est pas cyclotomique.*

Il existe dans $\Xi_{u,\eta}$ une infinité de zéros ou de pôles provenant de $t \longmapsto A_{M_\delta}(\boldsymbol{s}^0 + t\theta)$ pour un point générique $\boldsymbol{s}^0 \in \partial W(0) \cap \mathcal{B}$ et pour une direction convenable θ.

Remarque 19. On a :

$$A_{M_\delta}(\mathbf{s}) = \prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \left[\zeta_{M_\delta} \left(\sum_{l=1}^{n} \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell \right) \right]^{-\gamma(\beta)} \qquad \text{si} \quad \mathbf{s} \in W(\delta). \tag{A.4}$$

En considérant la droite explicitée au début de §A.1.1, on sait que les zéros ou pôles de $A_{M_\delta}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ sont déterminés par ceux de $\zeta_{M_\delta}(s)$, et puisque ceux-ci sont exactement les mêmes (avec les mêmes multiplicités) que ceux de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$, il vient que tout zéro ou pôle de $A_{M_\delta}\big|_L$ est nécessairement de la forme :

$$t(\beta, \rho) = \frac{\rho - \sum_{l=1}^{n} \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell^0}{\sum_{l=1}^{n} \langle \beta, \alpha^\ell \rangle \theta_\ell} = \frac{\rho - \sum_{j=1}^{r} \langle \mathbf{s}^0, \alpha_j \rangle \beta_j}{\sum_{j=1}^{r} \langle \theta, \alpha_j \rangle \beta_j} \tag{A.5}$$

où $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ est tel que $\gamma(\beta) \neq 0$, et ρ désigne un zéro ou un pôle de $\zeta(s)$.

Dans la suite, on se limitera à considérer les ρ se trouvant dans la bande critique ; cela suffira pour prouver la proposition 6. □

Preuve de la proposition. On fixe l'indice e et on suppose que $\mathbf{s}^0$ satisfait la condition (A.3). Considérons une boule ouverte $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{s}^0)$ qui contient le point $\mathbf{s}^0$.

Dans le reste l'attention sera essentiellement portée sur les $\beta \in B_e$. Pour de tels β, (A.5) se simplifie évidemment et donne :

$$t(\beta, \rho) = \frac{\rho - i \sum_{j \in \Lambda_e} \langle \gamma^0, \alpha_j \rangle \beta_j}{\sum_{j \in \Lambda_e} \langle \theta, \alpha_j \rangle \beta_j}.$$

On observe alors que puisque θ est choisi de sorte que la condition (2.14) soit satisfaite, et ρ se trouve ici dans la bande critique, on doit avoir :

$$\Re(t(\beta, \rho)) \in (0, 1).$$

Le but est de montrer qu'une infinité de $t(\beta, \rho)$ se trouvent dans $\Xi_{u,\eta}$ et sont réellement des pôles ou zéros de $A_{M_\delta}\big|_L$. On procède en deux étapes :

(1) Prouver qu'une infinité de $t(\beta, \rho)$ sont de potentiels zéros ou pôles dans $\Xi_{u,\eta}$.

(2) A partir de l'ensemble des $t(\beta, \rho)$ construit en (1), prouver qu'une infinité de zéros ou pôles ne peuvent être compensés.

Preuve du point (1). Il s'agit d'une conséquence immédiate du lemme suivant.

Lemme 17. *On suppose que θ satisfait, en plus de (2.14), la condition :*

$$\langle \theta, \alpha_j \rangle \geq K max_{\{\gamma^0 : s^0 \in \mathcal{B}\}} \left| \langle \gamma^0, \alpha_j \rangle \right| \quad \textit{pour chaque } j \in \Lambda_e. \tag{A.6}$$

(K étant le paramètre défini en (A.2))

Il existe $b = b(\eta, K)$ tel que si $\beta \in B_e$ satisfait $||\beta|| > b$, alors il existe ρ tel que $t(\beta, \rho) \in \Xi_{u,\eta}$.

Preuve du lemme 17. Pour $\beta \in B_e \setminus \{\mathbf{0}\}$, on a

$$t(\beta,\rho) \in \Xi_{u,\eta} \quad \text{ssi} \quad 2\pi x(\beta) < \Im(\rho) < 2\pi x(\beta) + 2\pi\eta y(\beta), \tag{A.7}$$

où

$$\begin{aligned} x(\beta) &= \tfrac{1}{2\pi}\left(u\sum_{j\in\Lambda_e}\langle\theta,\alpha_j\rangle\beta_j + \sum_{j\in\Lambda_e}\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle\beta_j\right), \\ y(\beta) &= \tfrac{1}{2\pi}\sum_{j\in\Lambda_e}\langle\theta,\alpha_j\rangle\beta_j. \end{aligned}$$

On doit donc vérifier qu'il existe ρ de partie imaginaire dans l'intervalle défini en (A.7) pour $||\beta||$ assez grand.

Pour cela on a besoin d'un résultat classique concernant le nombre de zéros de $\zeta(s)$ dans la bande critique et de partie imaginaire au plus T :

$$N(T) := \#\{\rho : 0 \le \Im(\rho) \le T\} = \frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

Compte-tenu de l'hypothèse $(A.6)$, une vérification élémentaire montre que les inégalités en (A.7) sont satisfaites ssi

$$0 < \left(u - \frac{1}{K}\right)y(\beta) \le x(\beta) \le \left(u + \frac{1}{K}\right)y(\beta);$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} N(2\pi x(\beta) + 2\pi\eta y(\beta)) - N(2\pi x(\beta)) &= (x(\beta) + \eta y(\beta))\log(x(\beta) + \eta y(\beta)) \\ &\quad -\eta y(\beta) - x(\beta)\log(x(\beta)) + O(x(\beta) + \eta y(\beta)) \\ &\ge \left(u - \tfrac{1}{K} + \eta\right)y(\beta)\log\left(\left(u - \tfrac{1}{K}\right)y(\beta)\right) - \eta y(\beta) \\ &\quad - \left(u + \tfrac{1}{K}\right)y(\beta)\log\left(\left(u + \tfrac{1}{K}\right)y(\beta)\right) + O(y(\beta)) \\ &= \left(\eta - \tfrac{2}{K}\right)y(\beta)\log(y(\beta)) + O(y(\beta)). \end{aligned}$$

On conclut que pour $\beta \in B_e$ avec $||\beta||$ assez grand, en particulier pour $||\beta||$ suffisamment grand de sorte que

$$(\eta - \frac{2}{K})\log y(\beta) + c > 1,$$

où c est la constante impliquée dans le terme d'erreur $O(y(\beta))$ (c'est l'origine de la borne inférieure $b(\eta, K)$ dans l'énoncé du lemme), il existe des ρ avec

$$2\pi x(\beta) < Im(\rho) < 2\pi\left[x(\beta) + \eta y(\beta)\right].$$

Ceci termine la preuve du lemme 17 et prouve le point (1). $\square$

preuve du point (2). La preuve de ce point est plus délicate.

La première chose qui doit être comprise est la possible compensation qui peut s'effectuer entre un éventuel zéro ou pôle $t(\beta,\rho) \in \Xi_{u,\eta}$ que l'on a identifié au point (1) (tel que $\beta \in B_e$ et $\gamma(\beta) \neq 0$) et un autre éventuel pôle ou zéro $t(\beta',\rho') \in \Xi_{u,\eta}$ déterminé par *n'importe quel* $\beta' \in \mathbf{N}^r - \{\mathbf{0}\}$ (avec $\gamma(\beta') \neq 0$) et un zéro ρ' dans la bande critique. Lorsque cette compensation a lieu, on a nécessairement les égalités suivantes d'après (A.5) (puisque $\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle = 0$ pour tout $j \in \Lambda_e$) :

$$\frac{\Re(\rho') - \sum_{j=1}^{r} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \beta'_j}{\sum_{j=1}^{r} \langle \theta, \alpha_j \rangle \beta'_j} = \frac{\Re(\rho)}{\sum_{j\in\Lambda_e} \langle \theta, \alpha_j \rangle \beta_j} \quad \text{et} \quad \gamma(\beta') = -\gamma(\beta).$$

Deux possibilités distincts sont alors à considérer. Soit $\sum_{j=1}^{r} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \beta'_j$ ne s'annule pas, soit cette quantité s'annule, et dans ce cas, la condition de généricité (A.3) sur $\mathbf{s}^0$ implique le fait que $\beta' \in B_e$ puisque $\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \geq 0$ pour tout j et s'annule ssi $j \in \Lambda_e$. Observons dans un premier temps ce qui se passe lorsque $\sum_{j=1}^{r} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \beta'_j \neq 0$.

Note. Par la suite, on fixe un point générique arbitraire $\mathbf{s}^0$ qui satisfait la condition (A.3). On considère alors une boule ouverte $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{s}^0)$ contenant $\mathbf{s}^0$ et on suppose que le vecteur direction réel θ satisfait la condition (A.6) pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{B}(\mathbf{s}^0)$ (en plus biensûr de (2.14)). Contrairement à (2.14) qui est une condition qui est uniforme sur tous les points à l'intérieur de la face $\mathcal{F}(\alpha_e)$, on a maintenant que θ est choisi de façon localement uniforme au voisinage du point $\mathbf{s}^0$.

Lemme 18. *Il existe un sous-ensemble générique $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{s}^0)$ tel que $\boldsymbol{s}' = \sigma' + i\gamma' \in \mathcal{B}'$ implique :*

$$\frac{\Re(\rho') - \sum_{l=1}^{n} \langle \beta', \alpha^\ell \rangle \sigma'_\ell}{\sum_{j=1}^{r} \langle \theta, \alpha_j \rangle \beta'_j} \neq \frac{\Re(\rho)}{\sum_{j\in\Lambda_e} \langle \theta, \alpha_j \rangle \beta_j} \tag{A.8}$$

pour tout $\beta \in B_e - \{\boldsymbol{0}\}$, $\beta' \in \boldsymbol{N}^r - \{\boldsymbol{0}\}$ vérifiant $\sum_{j=1}^{r} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \beta'_j \neq 0$, et tout zéro ρ, ρ' de $\zeta(s)$ dans la bande critique.

Preuve. Soit E l'hyperplan $\{\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n : \langle \mathbf{x}, \alpha_e \rangle = 0\}$. On définit $U = E \cap \mathcal{B}(\mathbf{s}^0)$, et on recherche un sous-ensemble dense de U sur lequel la propriété (A.8) est satisfaite pour démontrer l'assertion du lemme.

Pour chaque β' tel que $\sum_{j=1}^{r} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \beta'_j \neq 0$, on définit la forme linéaire suivante : $c_{\beta'} : E \longrightarrow \mathbf{C}$ en posant

$$c_{\beta'}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\ell} \langle \beta', \alpha^\ell \rangle x_\ell =_{def} z.$$

On affirme que $c_{\beta'}(.)$ *n'est pas* constante.

Pour le voir, on élimine tout d'abord une coordonnée de $c_{\beta'}$. Quitte à permuter les indices, on peut supposer que $\alpha_e^n \neq 0$. Ainsi, $\mathbf{x} \in E$ ssi $x_n = (-1/\alpha_e^n) \sum_{i<n} \alpha_e^i x_i$. En réécrivant $c_{\beta'}$ en fonction de $\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ on obtient

$$c_{\beta'}(\mathbf{x}') = \sum_{i<n} \left(\langle \beta', \alpha^i \rangle - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n} \langle \beta', \alpha^n \rangle \right) x_i.$$

Par conséquent, $c_{\beta'}$ est constante ssi pour chaque $i < n$, $\langle \beta', \alpha^i \rangle - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n} \langle \beta', \alpha^n \rangle = 0$.

Des manipulations élémentaires permettent alors de montrer :

$$0 \neq \sum_{j=1}^{r} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \beta'_j = \frac{1}{\alpha_e^n} \cdot \langle \sigma^0, \alpha_e \rangle \cdot \left(\sum_{j=1}^{r} \beta'_j \alpha_j^n \right) = 0.$$

Et donc $c_{\beta'}$ ne peut être constante si $\sum_{j=1}^{r} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \beta'_j \neq 0$.

Rappelons maintenant que la condition de généricité (A.3) satisfaite par $\mathbf{s}^0$ équivaut à $\sum_j \beta'_j \alpha_j \notin \langle \alpha_e \rangle$. Définissons alors pour chacun de ces β' :

$$M_{\beta'} = \bigcup_{\rho, \rho'} \left\{ \Re(\rho') - \Re(\rho) \frac{\sum_{j=1}^{r} \langle \theta, \alpha_j \rangle \beta'_j}{\sum_{j \in \Lambda_e} \langle \theta, \alpha_j \rangle \beta_j} : \beta \in B_e \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{r} \beta'_j \alpha_j \notin \langle \alpha_e \rangle \right\}.$$

Il est clair que $M_{\beta'}$ est un ensemble dénombrable.

Pour chaque $z \in M_{\beta'}$, $c_{\beta'}^{-1}(z)$ est un sous-espace affine de E de dimension au plus $n-2$ et est donc fermé et d'intérieur vide dans E. D'après le théorème de Baire on déduit que $\bigcup_{\{\beta' : \sum_j \beta'_j \alpha_j \notin \langle \alpha_e \rangle\}} \bigcup_{z \in M_{\beta'}} c_{\beta'}^{-1}(z)$ est également d'intérieur vide dans E.

On conclut donc que $\mathcal{B}' =_{def} U \setminus \bigcup_{\beta'} \bigcup_{z \in M_{\beta'}} c_{\beta'}^{-1}(z)$ est dense dans U, et satisfait toutes les propriétés nécessaires ; ce qui termine la preuve du lemme. □

La possibilité restante concerne une éventuelle compensation entre le candidat zéro ou pôle initial $t(\beta, \rho) \in \Xi_{u,\eta}$ (avec $\beta \in B_e$, $\gamma(\beta) \neq 0$) et un autre pôle ou zéro $t(\beta', \rho') \in \Xi_{u,\eta}$ tel que $\gamma(\beta') = -\gamma(\beta)$ et

$$\sum_{j=1}^{r} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \beta'_j = 0.$$

D'après la condition de généricité (A.3) vérifiée par $\mathbf{s}^0$, on rappelle que ceci implique que $\beta' \in B_e$. Et par conséquent, il existe q'_0 $(= q'_0(\beta')) \in \mathbf{Q}$ tel que

$$\sum_{j=1}^{r} \beta'_j \alpha_j = q'_0 \alpha_e \,. \tag{A.9}$$

Si une telle compensation a lieu, l'égalité $t(\beta', \rho') = t(\beta, \rho)$ et les identités données par (A.5) se réduisent à l'équation suivante :

$$\frac{\rho' - i\sum_{j=1}^{r}\langle\gamma^0, \alpha_j\rangle\beta'_j}{\sum_{j=1}^{r}\langle\theta, \alpha_j\rangle\beta'_j} = \frac{\rho - i\sum_{j\in\Lambda_e}\langle\gamma^0, \alpha_j\rangle\beta_j}{\sum_{j\in\Lambda_e}\langle\theta, \alpha_j\rangle\beta_j}. \tag{A.10}$$

On utilisa alors (A.9) pour réécrire les termes selon $\sum_{j=1}^{r}\langle\gamma^0, \alpha_j\rangle\beta'_j$ resp. $\sum_j\langle\theta, \alpha_j\rangle\beta'_j$ en terme de $\langle\gamma^0, \alpha_e\rangle$ resp. $\langle\theta, \alpha_e\rangle$. Dans le membre de gauche, (A.9) implique

$$\sum_{j=1}^{r}\langle\gamma^0, \alpha_j\rangle\beta'_j = q'_0\langle\gamma^0, \alpha_e\rangle \quad \text{resp.} \quad \sum_{j=1}^{r}\langle\theta, \alpha_j\rangle\beta'_j = q'_0\langle\theta, \alpha_e\rangle.$$

Dans le membre de droite, nous savons qu'il existe $q_j \in \mathbf{Q}$ tel que $\alpha_j = q_j\alpha_e$ pour chaque $j \in \Lambda_e$. Un calcul direct permet de voir que si (A.10) est vérifiée, alors nécessairement

$$\rho' = \rho \cdot \frac{q'_0}{\sum_{j\in\Lambda_e} q_j\,\beta_j} \tag{A.11}$$

c'est à dire que ρ' doit être un multiple rationnel de ρ.

Par conséquent, la compensation entre $t(\beta', \rho')$ et $t(\beta, \rho)$ dans le cas où $\sum_j\langle\sigma^0, \alpha_j\rangle\beta'_j = 0$ introduit le problème consistant à comprendre précisément l'ensemble des zéros ρ' de $\zeta(s)$ se trouvant sur une droite passant par 0 et un zéro fixé ρ. Ceci a déjà fait l'objet d'une étude par Dhalquist. La variante de son résultat que nous utiliserons utilise les définitions et notations introduites au lemme 17.

Lemme 19 (Dhalquist c.f. [8])**.** *Si $\|\beta_0\|$ est assez grand, il existe dans le rectangle $\mathcal{R}$:*

$$\mathcal{R} : \begin{array}{ccccc} 0 & < & \Re(z) & < & 1 \\ 2\pi x(\beta_0) & < & \Im(z) & < & 2\pi x(\beta_0) + 2\pi\eta y(\beta_0) \end{array}$$

un zéro ρ_0 de la fonction zêta de Riemann tel que la droite ℓ_0 passant par 0 *et ρ_0 ne contient aucun zéro en dehors de $\mathcal{R}$.*

Nous prouverons le lemme 19 à la fin de cette section. Dans ce qui suit, on montre comment cette assertion permet de compléter la preuve de la proposition 6 en montrant l'existence d'une infinité de véritables zéros ou pôles de $A_{M_\delta}\big|_L$ dans $\Xi_{u,\eta}$ (c'est à dire qui ne sont pas compensés).

On peut donner dans un premier temps quelques précisions concernant q'_0 et les q_j. On reprend pour cela ce qui a été fait à la page 56 en privilégiant un choix

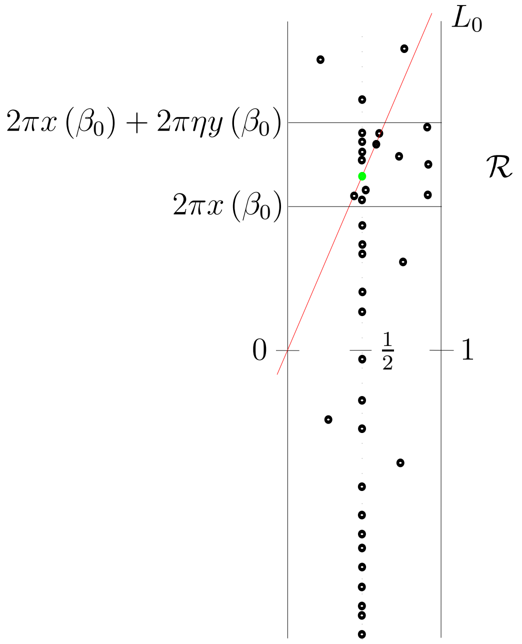

FIG. A.1 – Le lemme 19 de Dhalquist.

particulier d'un vecteur de $\langle\alpha_e\rangle$. Il existe en particulier un vecteur $\widehat{\alpha}_e$ dont les composantes sont des entiers premiers entre eux tel que $\alpha_e = q_e\widehat{\alpha}_e$. En remplaçant α_e par $\widehat{\alpha}_e$ dans ce qui précède, on peut alors définir de la même façon les entiers q_j vérifiant $\alpha_j = q_j\widehat{\alpha}_e$ pour $j \neq e$. En introduisant $\widehat{\alpha}_e$ dans (A.10) on se ramène à la même équation (A.11) où

$$\sum_j \beta_j'\alpha_j = q_0'\widehat{\alpha}_e.$$

On conclut donc également que $q_0' \in \mathbf{N}$.

Avec ces choix des q_j, on peut maintenant définir $\widehat{\mathcal{Q}} = \{q_j\}_{j\in\Lambda_e}$ et $\Upsilon_e(\widehat{\mathcal{Q}})$ exactement comme dans (A.1) avec $Q = \widehat{\mathcal{Q}}$. Et en appliquant les arguments présentés dans cette section, on conclut que $\Upsilon_e(\widehat{\mathcal{Q}})$ contient une infinité de nombres sommets.

Soit alors $\beta^* \in B_e$ tel que

$$v(\beta^*) =_{def} \sum_{j\in\Lambda_e} q_j\beta_j^*$$

est un nombre sommet de $\Upsilon_e(\widehat{\mathcal{Q}})$, et soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ la suite réelle associée à $v(\beta^*)$.

Le but est de montrer qu'il existe un zéro ρ_0^* tel que $t(\beta^*, \rho_0^*)$ est un véritable zéro ou pôle de $A_{M_\delta}\big|_L$ se trouvant dans $\Xi_{u,\eta}$, c'est à dire que celui-ci ne peut être compensé par un autre éventuel $t(\beta', \rho')$ vérifiant $\sum_j \langle\sigma^0, \alpha_j\rangle\,\beta_j' = 0$.

Puisque l'ensemble des nombres sommets de $\Upsilon_e(\mathcal{Q})$ est infini, on peut supposer que $||\beta^*||$ est suffisamment grand de sorte que le lemme 19 puisse être appliqué à β^* et au rectangle $\mathcal{R}$. Par conséquent, il existe un zéro $\rho_0^* \in \mathcal{R}$ tel que la droite passant par 0 et ρ_0^* ne contient *aucun* zéro de $\zeta(s)$ en dehors de $\mathcal{R}$. On peut alors définir l'ensemble suivant :

$$\Omega(\rho_0^*) = \{\rho \in \mathcal{R} : \rho \in \rho_0^* \mathbf{Q}\}.$$

Supposons premièrement que $\Omega(\rho_0^*) = \emptyset$. Ceci impliquerait que pour tout β' tel que $\sum_j \beta_j' \alpha_j \in \langle \widehat{\alpha}_e \rangle$, et tout zéro ρ',

$$t(\beta', \rho') \neq t(\beta^*, \rho_0^*),$$

car sinon on aurait $\rho' \in \mathcal{R}$ et par (A.11), $\rho' \in \rho_0^* \mathbf{Q}$. Ainsi, si $\Omega(\rho^*) = \emptyset$, alors $t(\beta^*, \rho_0^*)$ serait un vrai pôle ou zéro de $A_{M_\delta}\big|_L$ dans $\Xi_{u,\eta}$ qui ne pourrait être compensé, et la preuve du point (2) serait terminée. On suppose donc que $\Omega(\rho_0^*)$ est non vide et nécessairement également un ensemble fini.

Il existe donc un ensemble fini composé de nombres rationnels u_k tel que $\Omega(\rho_0^*) = \{\rho_0^* u_k\}_k$. En écrivant chaque u_k sous une forme réduite, pour chaque k, il existe un ensemble fini d'entiers $y_\ell(k)$ tels que

$$u_k = \prod p_\ell^{y_\ell(k)}.$$

L'ensemble des exposants $\{y_\ell(k)\}_{\ell,k}$ est par conséquent un ensemble fini. L'ensemble $\{\sum_\ell \lambda_\ell y_\ell(k)\}_k$ est donc un sous-ensemble borné de $\mathbf{R}$.

Soit k^* une valeur de k pour laquelle

$$\sum_\ell \lambda_\ell y_\ell(k^*) = \inf_k \Big\{ \sum_\ell \lambda_\ell y_\ell(k) \Big\}$$

et définissons en particulier le nombre rationnel u^* avec la factorisation particulière

$$u^* = \prod_\ell p_\ell^{y_\ell(k^*)}.$$

A ce nombre rationnel il y correspond un zéro ρ^* tel que $\rho^* = \rho_0^* \cdot u^*$.

Supposons maintenant qu'il existe un autre zéro ρ' et $\beta' \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que pour un certain β^*, construit comme précédemment,

$$t(\beta', \rho') = t(\beta^*, \rho^*) \quad \text{et} \quad \gamma(\beta') = -\gamma(\beta^*).$$

On peut alors conclure grâce à l'observation cruciale suivante.

Lemme 20. *Si $||\beta^*||$ est suffisamment grand, alors $t(\beta^*, \rho^*)$ doit être un zéro ou un pôle de $A_{M_\delta}\big|_L$ dans $\Xi_{u,\eta}$. En particulier, celui-ci ne peut être compensé par tout autre éventuel pôle ou zéro $t(\beta', \rho') \in \Xi_{u,\eta}$ si $\sum_j \beta_j' \alpha_j \in \langle \widehat{\alpha}_e \rangle$.*

Preuve. On raisonne par contradiction.

Exactement comme auparavant, il existe $q_0'(=q_0'(\beta')) \in \mathbf{N}$ tel que

$$\frac{\rho'}{q_0'} = \frac{\rho^*}{\sum_{j\in\Lambda_e} q_j\, \beta_j^*}\,.$$

On factorise alors $q_0', \sum_j q_j\beta_j^*$ sous la forme d'un produit de puissances de nombres premiers. Ainsi, il existe des entiers positifs ω_ℓ^* et ω_ℓ' tels que

$$\sum_{j\in\Lambda_e} q_j\,\beta_j^* = \prod_\ell p_\ell^{\omega_\ell^*} \quad \text{et} \quad q_0' = \prod_\ell p_\ell^{\omega_\ell'}\,.$$

De plus, puisque ρ' est un multiple rationnel de ρ^* et ρ^* est un multiple rationnel de ρ_0^*, il existe également des entiers y_ℓ' tels que $\rho' = \rho_0^* \prod_\ell p_\ell^{y_\ell'}$. Puisque $\rho'/\rho^* = (\rho'/\rho_0^*)/(\rho^*/\rho_0^*)$, on conclut que

$$y_\ell(k^*) - \omega_\ell^* = y_\ell' - \omega_\ell' \quad \text{pour chaque } \ell.$$

Mais ceci implique :

$$\sum_\ell \lambda_\ell(y_\ell(k^*) - y_\ell') = \sum_\ell \lambda_\ell(\omega_\ell^* - \omega_\ell'). \tag{A.12}$$

Or par définition de u^*, le membre de gauche de $(A.12)$ doit être négatif ou nul tandis que le membre de droite doit être *positif*. Cela découle des trois observation suivantes :

(i) $\sum_{j\in\Lambda_e} q_j\,\beta_j^*$ *est un nombre sommet*;

(ii) $q_0' \in \Upsilon_e(\widehat{\mathcal{Q}})$ *puisque* $\beta' \in B_e$ *et* $\gamma(\beta') \neq 0$ *;*

(iii) *pour* $||\beta^*||$ *suffisamment grand l'inégalité* $q_0' < 2\sum_{j\in\Lambda_e} q_j\beta_j^*$ *est satisfaite lorsque* $t(\beta',\rho'), t(\beta^*,\rho^*) \in \Xi_{u,\eta}$.

Vérifions en effet (iii).

Cette assertion découle du fait que $\rho'/\rho^* = q_0'/\sum_{j\in\Lambda_e} q_j\beta_j'$ peut être rendu arbitrairement proche de $\Im\rho'/\Im\rho^*$ en faisant tendre $||\beta^*|| \to \infty$. Puisque $\Im(\rho')$ et $\Im(\rho^*)$ sont tous deux dans l'intervalle $\left[\left(u-\frac{1}{K}\right)y(\beta^*), \left(u+\frac{1}{K}+\eta\right)y(\beta^*)\right]$, le fait que $0<\eta<u-\frac{3}{K}$ implique alors que $\Im\rho'/\Im\rho^* < \frac{u+\frac{1}{K}+\eta}{u-\frac{1}{K}} < 2$. Et ainsi, si $||\beta^*||$ est suffisamment grand, alors on a bien $q_0' < 2\sum_{j\in\Lambda_e} q_j\beta_j^*$.

Fin de la preuve du point (2). Pour chaque nombre sommet de $\Upsilon_e(\widehat{\mathcal{Q}})$, $A_{M_\delta}\big|_L$ a donc un zéro ou un pôle dans $\Xi_{u,\eta}$ qui n'est pas compensé. Et puisque $\Upsilon_e(\widehat{\mathcal{Q}})$ contient une infinité de tels nombres sommets, une infinité de pôles ou de zéros de $A_{M_\delta}\big|_L$ se trouvent dans $\Xi_{u,\eta}$. Ceci complète la preuve du point (2) de la proposition 6. □

Preuve du lemme 19.

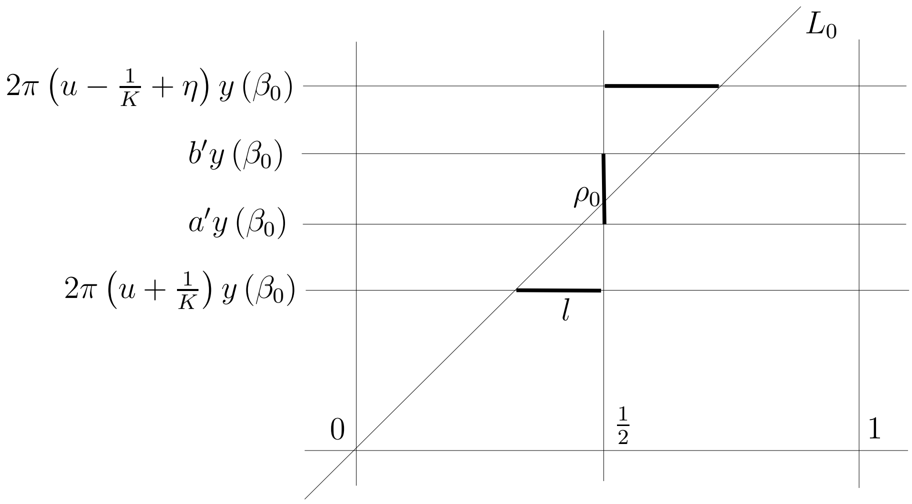

FIG. A.2 – Preuve du lemme de Dhalquist 19.

Notons dans un premier temps que le rectangle $\mathcal{R}$ contient le rectangle $\mathcal{R}'$ suivant :

$$\mathcal{R}' : \begin{array}{ccccc} 0 & < & \Re(s) & < & 1 \\ 2\pi\left(u+\frac{1}{K}\right)y\left(\beta_0\right) & < & \Im(s) & < & 2\pi\left(u-\frac{1}{K}+\eta\right)y\left(\beta_0\right). \end{array}$$

Soit a' et b' tels que :

$$\begin{array}{lcl} a' & > & 2\pi\left(u+\frac{1}{K}\right)y\left(\beta_0\right) \\ b' & < & 2\pi\left(u-\frac{1}{K}+\eta\right)y\left(\beta_0\right); \end{array}$$

et considérons le rectangle $\mathcal{R}'' \subsetneq \mathcal{R}' \subsetneq \mathcal{R}$ défini par :

$$\mathcal{R}'' : \begin{array}{ccccc} 0 & < & \Re(z) & < & 1 \\ a'y\left(\beta_0\right) & < & \Im(z) & < & b'y\left(\beta_0\right). \end{array}$$

D'après un résultat dû à hardy et Littlewood [14], le nombre de zéros distincts de $\zeta(s)$ dans $\mathcal{R}''$ se trouvant sur la droite $\Re(s)=\frac{1}{2}$ entre $\Im(s)=a'y\left(\beta_0\right)$ et $\Im(s)=b'y\left(\beta_0\right)=a'y\left(\beta_0\right)+\frac{(b'-a')}{a'}a'y\left(\beta_0\right)$ est plus grand que $C\left(\frac{b'-a'}{a'}\right)a'y\left(\beta_0\right)$ où $C(\epsilon)$ est une constante qui dépend de $\epsilon>0$.

D'autre part, soit L_0 une droite passant par 0 et par un zéro de $\zeta(s)$ se trouvant sur $\mathcal{R}''\cap\{\Re(z)=\frac{1}{2}\}$.

Explicitons une borne inférieure pour tous les autres zéros ρ sur $L_0 \setminus \mathcal{R}'$ de la quantité $l = |\Re(\rho) - \frac{1}{2}|$.

En appliquant le théorème de Thales aux triangles délimités par les droites $\Im(s) = 0$, $\Re(s) = \frac{1}{2}$, $\Im(s) = 2\pi\left(u + \frac{1}{K}\right) y(\beta_0)$, $\Im(s) = 2\pi\left(u - \frac{1}{K} + \eta\right) y(\beta_0)$ et la droite passant par 0 et ρ, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{l}{\frac{1}{2}} &\geq \min\left(\frac{a'y(\beta_0) - 2\pi\left(u + \frac{1}{K}\right)y(\beta_0)}{a'y(\beta_0)}; \frac{2\pi\left(u - \frac{1}{K} + \eta\right)y(\beta_0) - b'y(\beta_0)}{b'y(\beta_0)}\right) \\ &= \min\left(\frac{a' - 2\pi\left(u + \frac{1}{K}\right)}{a'}; \frac{2\pi\left(u - \frac{1}{K} + \eta\right) - b'}{b'}\right) = \epsilon_0 > 0. \end{aligned}$$

Finalement, on a l'existence de L_0 avec la propriété désirée en utilisant le résultat de Bohr and Landau [3] qui permet d'affirmer que le nombre de zéros de $\zeta(s)$ de partie imaginaire $0 < \Im(s) < 2\pi\left(u - \frac{1}{K} + \eta\right) y(\beta_0)$ et de partie réelle $|\Re(s) - \frac{1}{2}| > \frac{\epsilon_0}{2}$ est $o(y(\beta_0))$.

$\square$

Frontière naturelle de $Z(\mathbf{s})$ lorsque $[h]_e$ n'est pas cyclotomique et h irréductible.

Etant donné $\delta > 0$, l'écriture de $Z(\mathbf{s})$ pour $\mathbf{s} \in W(\delta)$ dépend de δ :

$$Z(\mathbf{s}) = \prod_{p \leq M_\delta} h\left(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}\right) A_{M_\delta}(\mathbf{s}) \quad (\mathbf{s} \in W(\delta));$$

où $M_\delta \longrightarrow +\infty$ pour δ tendant vers 0 (d'après le lemme 6 du §2.4).

Comme précédemment on considère pour $\theta \in \mathbf{R}^n_{>0}$:

$$t \longmapsto Z(\mathbf{s}^0 + t\theta),$$

et ses zéros ou singularités dans le rectangle $\Xi_{u,\eta}$ $(u, \eta > 0)$.

La principale difficulté est qu'a priori il est possible que les singularités provenant de $t \longmapsto A_{M_\delta}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ qui s'accumulent au voisinage à droite de $t = 0$ soient compensées par des zéros provenant du facteur $t \longmapsto \prod_{p \leq M_\delta} h\left(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}\right)$.

Pour résoudre ce problème, il suffit de répéter le lemme 7 du §2.4 et le lemme 8 avec la remarque 9 lorsque h est irréductible pour finalement obtenir le résultat suivant :

Théorème 16. *On suppose que $[h]_e$ n'est pas cyclotomique et que h est irréductible.*

$\partial W(0)$ est une frontière naturelle pour $Z(\boldsymbol{s})$. Précisément, il n'existe pas de prolongement méromorphe de $Z(\boldsymbol{s})$ à tout domaine contenant une boule ouverte $\mathcal{B}$ centrée en un point $\boldsymbol{s}^0$ de la frontière $\partial W(0)$ de $W(0)$ ($Z(\boldsymbol{s})$ admettant une accumulation de zéros ou de pôles $t(\beta, \rho)$ de la forme de (2.15) provenant des ζ-facteurs au voisinage de $\boldsymbol{s}^0$).

A.2 Deuxième méthode : détermination de la frontière naturelle de $Z(\mathrm{s})$ lorsque $[h]_e$ n'est pas cyclotomique en considérant les zéros provenant de $h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n})$.

Puisqu'ici $[h]_e$ n'est pas cyclotomique, il est possible de déterminer la frontière naturelle de $Z(\mathbf{s})$ d'une autre façon.

Il faudra cependant ici supposer que $\mathcal{F}(\alpha_e) \subseteq \partial W(0)$ est une face non dégénérée au sens de la définition 8 pour pouvoir disposer d'une expression convenable des zéros de $h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n})$.

De façon précise, l'accumulation de zéros ou de pôles qui apparaît au voisinage à droite de $\mathcal{F}(\alpha_e) \subseteq \partial W(0)$ dans la section précédente provenait de zéros de la fonction zêta de Riemann. Dans le cas présent, on va montrer qu'il y a également, au voisinage à droite de $\mathcal{F}(\alpha_e) \subseteq \partial W(0)$, une accumulation de zéros provenant des zéros de $h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n})$ (p étant un nombre premier) en donnant une version quantitative de celle exposée dans §2.4.

On considère donc un point $\mathbf{s}^0$ sur la face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ de $\partial W(0)$.

Ainsi pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$ $\mathbf{s}^0$ est tel que $\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \geq 0$, et $\langle \sigma^0, \alpha_e \rangle = 0$.

On considère une boule $\mathcal{B}$ de rayon arbitrairement petit autour de $\mathbf{s}^0$.

Quitte à perturber là encore $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{B} \cap \partial W(0)$, on suppose ici que σ^0 est tel que :

$$\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle = 0 \iff \alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e. \tag{A.13}$$

On désire trouver au moins une direction $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbf{N}^n$ telle que la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \{t \in \mathbf{C}, \Re(t) > 0\} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & Z\left(\mathbf{s}^0 + t\theta\right), \end{array}$$

n'admet pas de prolongement méromorphe au-delà de $\Re(t) = 0$.

On réutilise là encore l'écriture de $Z(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ du théorème 7.

On montrera qu'il y a beaucoup plus de zéros provenant du facteur $\prod_{p \leq M_\delta} h\left(p^{-s_1^0 + t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 + t\theta_n}\right)$ que de pôles provenant de $A_{M_\delta}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ pour t dans un petit rectangle à droite de l'axe imaginaire.

Théorème 17. *On suppose que $[h]_e$ n'est pas cyclotomique et que $\mathcal{F}(\alpha_e)$ est une face non dégénérée.*

$\mathcal{F}(\alpha_e)$ est une frontière naturelle pour $Z(\boldsymbol{s})$. De façon précise, il n'existe pas de prolongement méromorphe de $Z(\boldsymbol{s})$ à tout domaine contenant une boule ouverte $\mathcal{B}$ centrée en un point $\boldsymbol{s}^0$ de la face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ de $\partial W(0)$.

En particulier, le nombre $S(\nu,\eta)$ de zéros $t_{m,p}$ de la forme (A.16) (comptés sans leur multiplicité) dans la région $\Delta_{\nu,\eta}$ (pour $\nu,\eta,u>0$) déterminée par :

$$\Delta_{\nu,\eta}: \quad \begin{array}{l} \frac{1}{\nu+1} < \Re(t) < \frac{1}{\nu} \\ 0<u<\Im(t)<u+\eta, \end{array}$$

vérifie : pour tout $N\in\mathbf{N}$:

$$S(\nu,\eta) \geq \frac{\eta(C_{k_0}-1)}{\mathcal{K}_N 4\pi}\nu^N,$$

où $\mathcal{K}_N$ est une constante dépendant de N et $C_{k_0} = \left|c_{k_0}^{-1}\right| > 1$ est le module de l'inverse d'une racine c_{k_0} de $[h]_e$ de module strictement inférieur à 1.

Preuve. Soit $\delta>0$ et considérons une direction $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n)\in\mathbf{N}^n$ vérifiant :

$$\text{pour tout } \ \ell\in\{1,\ldots,n\}, \ \theta_\ell>1. \tag{A.14}$$

Premièrement notons que pour $\Re(t)>\delta$, l'écriture :

$$Z\left(\mathbf{s}^0+t\theta\right) = \prod_{p\leq M_\delta} h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n}\right) A_{M_\delta}\left(\mathbf{s}^0+t\theta\right)$$

du théorème 7 a bien un sens car :

$$\forall j\in\{1,\ldots,r\}, \langle\sigma^0+\theta\Re(t),\alpha_j\rangle \geq \Re(t)\langle\theta,\alpha_j\rangle > \delta\langle\theta,\alpha_j\rangle \geq \delta.$$

Considérons les zéros ou pôles de $Z(\mathbf{s}^0+t\theta)$ dans le rectangle (pour $\nu,\eta,u>0$) :

$$\Delta_{\nu,\eta}: \quad \begin{array}{l} \frac{1}{\nu+1} < \Re(t) < \frac{1}{\nu} \\ 0<u<\Im(t)<u+\eta. \end{array}$$

Rappelons les estimations qui ont été faites lors de la preuve du lemme 8 des éventuels zéros ou pôles de $A_{M_{\frac{1}{\nu+1}}}(\mathbf{s}^0+t\theta)$ dans $\Delta_{\nu,\eta}$.

Si t_0 est un zéro ou un pôle de $A_{M_{\frac{1}{\nu+1}}}(\mathbf{s}^0+t\theta)$ dans $\Delta_{\nu,\eta}$, il existe alors $\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}$ tel que $\sum_{\ell=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\left(s_\ell^0+t_0\theta_\ell\right)$ est un zéro ou un pôle de $\zeta(\cdot)$; et cette quantité satisfait nécessairement :

$$\Re(t_0)\sum_{\ell=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\theta_\ell \leq \Re\left(\sum_{\ell=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\left(s_\ell^0+t_0\theta_\ell\right)\right) \leq 1;$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{\nu+1} < \Re(t_0) \leq \frac{1}{\sum_{\ell=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\theta_\ell};$$

ce qui fournit :

$$\sum_{\ell=1}^{n} \langle \beta, \alpha^{\ell} \rangle \theta_{\ell} \leq (\nu+1)\,.$$

Cependant

$$\sum_{\ell=1}^{n} \langle \beta, \alpha^{\ell} \rangle \theta_{\ell} = \sum_{j=1}^{r} \beta_j \langle \alpha_j, \theta \rangle \geq \|\beta\| \quad (\text{d'après } (A.14))\,,$$

Ainsi :

$$\|\beta\| \leq (\nu+1)\,. \tag{A.15}$$

De plus,

$$\Im\,(t_0) < u + \eta$$

donne :

$$\Im\left(\sum_{\ell=1}^{n} \langle \beta, \alpha^{\ell} \rangle \left(s_{\ell}^{0} + t_0 \theta_{\ell}\right)\right) = O\left((\nu+1)\,(u+\eta)\right).$$

Ayant fixé $\eta > 0$, le nombre de zéros ou pôles d'un ζ-facteur de $A_{M_{\frac{1}{\nu+1}}}\left(\mathbf{s}^0 + t\theta\right)$ est donné par :

$$O\left((\nu+1)\log(\nu+1)\right),$$

compte-tenu d'un résultat classique concernant l'estimation du nombre de zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann de partie imaginaire inférieure à $(\nu+1)$. De plus, le même zéro ou le même pôle peut, d'après $(A.15)$, apparaître dans au plus $(\nu+1)^r$ termes ; ce qui donne au plus :

$$O\left((\nu+1)^{r+1}\log(\nu+1)\right)$$

zéros ou pôles provenant de $A_{M_{\frac{1}{\nu+1}}}\left(\mathbf{s}^0 + t\theta\right)$ dans $\Delta_{\nu,\eta}$ (comptés sans leur multiplicité).

D'un autre côté, donnons une estimation du nombre de zéros $S\,(\nu,\eta)$ provenant de
$\prod_{p \leq M_{\frac{1}{\nu+1}}} h\left(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}\right)$ dans $\Delta_{\nu,\eta}$.

Posons :

$$W^{p}_{\mathbf{s}^0,\theta}\,(X,Y) = 1 + a_1 p^{-i\langle \gamma^0, \alpha_1\rangle} X^{\langle \sigma^0, \alpha_1\rangle} Y^{\langle \theta, \alpha_1\rangle} + \cdots + a_r p^{-i\langle \gamma^0, \alpha_r\rangle} X^{\langle \sigma^0, \alpha_r\rangle} Y^{\langle \theta, \alpha_r\rangle}.$$

Alors, pour tout premier p, on a l'égalité suivante :

$$W^{p}_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(p^{-1}, p^{-t}\right) = h\left(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}\right).$$

On se ramène donc à considérer un produit eulérien de deux variables.

De même que dans la preuve du théorème 8, on exprime Y comme une série de Puiseux en X au voisinage de 0 telle que $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)=0$, ce qui est possible puisque $\mathcal{F}(\alpha_e)$ est non dégénérée.

les solutions $\Omega^p_1(X),\ldots,\Omega^p_f(X)$ pour X au voisinage de 0 ($X\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-$), en nombre fini, s'exprime de la façon suivante :

$$\forall k\in\{1,\ldots,f\},\Omega^p_k(X)=c^p_k+c^p_{k,1}X^{\vartheta_k}+\Omega^p_{k,2}(X),$$

où $c^p_k,c^p_{k,1}\in\mathbf{C}$, $\vartheta_k\in\mathbf{N}^*$ et $\Omega^p_{k,2}(X)=o\left(X^{\vartheta_k}\right)$;

et vérifient :

$$\forall k\in\{1,\ldots,f\},W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(X,\Omega^p_k(X)\right)\equiv 0.$$

On considère en particulier une branche $\Omega^p_{k_0}$ dont le premier terme $c^p_{k_0}$ est une racine de $[h]_e$ de module strictement inférieur à 1.

On pose alors $C_{k_0}=|c^p_{k_0}|^{-1}>1$ (notons que C_{k_0} ne dépend pas de p d'après la propriété (2.32) du chapitre 2).

Pour p premier assez grand on écrit :

$$\Omega^p_{k_0}\left(p^{-1}\right)=c^p_{k_0}+c^p_{k_0,1}p^{-\vartheta_{k_0}}+\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right).$$

Les zéros qui correspondent à la branche k_0 de $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(p^{-1},p^{-t}\right)=0$ pour p premier peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$t_{m,p}=-\frac{\log\left(c^p_{k_0}+c^p_{k_0,1}p^{-\vartheta_{k_0}}+\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)\right)}{\log(p)}+\frac{2\pi mi}{\log(p)}\tag{A.16}$$

où $m\in\mathbf{Z}$.

Pour avoir $t_{m,p}\in\Delta_{\nu,\eta}$, il faut que l'on ait :

$$\frac{1}{\nu+1}<-\frac{\log\left|c^p_{k_0}+c^p_{k_0,1}p^{-\vartheta_{k_0}}+\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)\right|}{\log(p)}<\frac{1}{\nu}.\tag{A.17}$$

Montrons alors que cette inégalité est bien vérifiée pour p se situant dans un intervalle convenable.

Tout d'abord, on peut supposer d'après le lemme 5 du chapitre 2 que quitte à perturber génériquement γ^0 la quantité $\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\neq 0$.

Ainsi il existe $p_0\in\mathbf{N}$ tel que pour $p>p_0$ on a soit :

$$\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|>1\ \text{ si }\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)>0;\tag{A.18}$$

ou soit :

$$\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|<1 \;\text{ si } \Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)<0. \tag{A.19}$$

dans les cas $(A.18)$ ou $(A.19)$ pour ν assez grand et

$$\begin{aligned} p &> \max\left(\left[4\nu\left|\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\right|\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu}\right]^{\vartheta_{k_0}},\left[4\left(\nu+1\right)\left|\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\right|\left(C_{k_0}^{\vartheta_{k_0}}\right)^{\nu+1}\right]^{\vartheta_{k_0}}\right)\\ &= \left[4\left(\nu+1\right)\left|\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\right|\left(C_{k_0}^{\vartheta_{k_0}}\right)^{\nu+1}\right]^{\vartheta_{k_0}} \end{aligned}$$

(ce qui est possible d'après la proposition 2 page 51 car $|c^p_{k,0}|=|c_{k,0}|>0$ et $|c^p_{k,1}|$ est borné indépendamment de p), on obtient :

$$(-1)^{\varepsilon}\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu-\varepsilon}<\frac{1+(-1)^{\varepsilon}\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu+\varepsilon}}{\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu+\varepsilon}} \tag{A.20}$$

où $\varepsilon\in\{0,1\}$.

En effet, $(A.18)$ donne :

1. pour $\varepsilon=0$:

$$\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu}<1<\frac{1+\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu}}{\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu}};$$

2. pour $\varepsilon=1$, puisque $p>\left[4\left(\nu+1\right)\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu+1}\right]^{\vartheta_{k_0}}$:

$$\begin{aligned}
& \log\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu-1} \\
= & \left(\left(1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right)\overline{\left(1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right)}\right)^{\frac{-\nu-1}{2}} \\
= & \log\left(1+2\Re\left(\frac{c^p_{k_0},1}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}}+o\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\right)^{\frac{-\nu-1}{2}} \\
= & \frac{-\nu-1}{2}\left(2\Re\left(\frac{c^p_{k_0},1}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}}+o\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\right) \\
> & -2\left(\nu+1\right)\Re\left(\frac{c^p_{k_0},1}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}} \text{ pour } \nu \text{ assez grand } (\nu\geq\nu_0) \\
> & -\frac{1}{2}\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}} \\
> & \log\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}\right)=-\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}+o\left(\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}\right);
\end{aligned}$$

ce qui fournit l'inégalité recherchée (pour $\nu\geq\nu_0$) :

$$\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu-1}>1-\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{-1-\nu}=\frac{-1+\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{1+\nu}}{\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{1+\nu}}.$$

De façon similaire, $(A.19)$ donne :

1. pour $\varepsilon=0$, puisque $p>\left[-4\nu\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu}\right]^{\vartheta_{k_0}}$:

$$\begin{aligned}
& \log\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu} \\
= & \frac{\nu}{2}\left(-2\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}}+o\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\right) \\
< & 2\nu\left(-\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}}\right) \text{ pour } \nu \text{ assez grand } (\nu\geq\nu_1) \\
< & \frac{1}{2C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}} \\
< & \log\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}\right)=\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}+o\left(\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}\right);
\end{aligned}$$

ce qui garantit (pour $\nu \geq \nu_1$) :

$$\left|1+\frac{c_{k_0,1}^{p}}{c_{k_0}^{p}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega_{k_0,2}^{p}\left(p^{-1}\right)}{c_{k_0}^{p}}\right|^{-\nu}<1+\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}.$$

2. pour $\varepsilon = 1$:

$$\left|1+\frac{c_{k_0,1}^{p}}{c_{k_0}^{p}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega_{k_0,2}^{p}\left(p^{-1}\right)}{c_{k_0}^{p}}\right|^{-\nu-1}>1>1-\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}=\frac{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}-1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}.$$

Si on choisit maintenant :

$$C_{k_0}^{\nu}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\leq p\leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right),$$

(ce qui est compatible avec la précédente condition sur p pour avoir $(A.20)$) alors $(A.17)$ a bien lieu puisque d'après $(A.20)$ on a :

$$\begin{aligned}
C_{k_0}^{\nu}\left|1+\tfrac{c_{k_0,1}^{p}}{c_{k_0}^{p}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\tfrac{\Omega_{k_0,2}^{p}\left(p^{-1}\right)}{c_{k_0}^{p}}\right|^{-\nu} & <C_{k_0}^{\nu}\left(1+\tfrac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\\
& \leq p\\
& \leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\tfrac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\\
& <C_{k_0}^{\nu+1}\left|1+\tfrac{c_{k_0,1}^{p}}{c_{k_0}^{p}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\tfrac{\Omega_{k_0,2}^{p}\left(p^{-1}\right)}{c_{k_0}^{p}}\right|^{-\nu-1};
\end{aligned}$$

et en prenant finalement le logarithme de part et d'autre on déduit $(A.17)$.

Maintenant, $\eta > 0$ étant fixé, si on choisit ν entier positif tel que $\frac{2\pi}{\log\left(C_{k_0}^{\nu}+1\right)} < \eta$, alors pour tout premier p tel que :

$$C_{k_0}^{\nu}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\leq p\leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right),$$

on aura $t_{m,p} \in \Delta_{\nu,\eta}$ si et seulement si :

$$u<\frac{2\pi m}{\log(p)}-\frac{\arg\left(\Omega_{k_0}^{p}\left(p^{-1}\right)\right)}{\log(p)}<u+\eta,$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{u\log(p)}{2\pi}+\frac{\arg\left(\Omega_{k_0}^{p}\left(p^{-1}\right)\right)}{2\pi}<m<\frac{(u+\eta)\log(p)}{2\pi}+\frac{\arg\left(\Omega_{k_0}^{p}\left(p^{-1}\right)\right)}{2\pi}. \tag{A.21}$$

On aura donc pour p fixé $\frac{\eta\log(p)}{2\pi}+\varpi$ zéros $t_{m,p}$ de $W_{\mathbf{s}^0,\theta}^{p}\left(p^{-1},p^{-t}\right)$ dans $\Delta_{\nu,\eta}$ où $|\varpi|\leq 1$.

Finalement, si $S^*(\nu,\eta)$ désigne le nombre de zéros de $\prod_{p\leq M_{\frac{1}{\nu+1}}} h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n}\right)$ dans $\Delta_{\nu,\eta}$ a priori comptés avec leur multiplicité, on aura :

$$S^*(\nu,\eta)\geq\sum_{C_{k_0}^{\nu}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\leq p\leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)}\left(\frac{\eta\log(p)}{2\pi}+\varpi\right). \tag{A.22}$$

En prenant ν assez grand de sorte que $C_{k_0}^{-\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}<\frac{C_{k_0}-1}{2\left(C_{k_0}^{1-\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}+1\right)}$ et en utilisant le théorème des nombres premiers (i.e. $\sum_{p\leq x}\log(p)\sim x$), $(A.22)$ donne :

$$\begin{aligned}
S^*(\nu,\eta) &\geq \frac{C_{k_0}^{\nu}\eta\left(C_{k_0}-1\right)}{4\pi}-\sum_{C_{k_0}^{\nu}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\leq p\leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)} 1\\
&\geq \frac{C_{k_0}^{\nu}\eta\left(C_{k_0}-1\right)}{4\pi}-\frac{C_{k_0}^{\nu+1}}{\log\left(C_{k_0}^{\nu+1}\right)}\\
&\sim \frac{C_{k_0}^{\nu}\eta\left(C_{k_0}-1\right)}{4\pi}.
\end{aligned}$$

Pour être en mesure de minorer $S(\nu,\eta)$, on veut établir une majoration de la multiplicité d'un zéro ou pôle $t_{m,p}$.

Ainsi étant donné un nombre premier p et un entier m, on veut majorer :

$$\mathcal{M}(m,p)=\#\left\{(m',p')\mid m'\in\mathbf{Z},p'\text{ prime, }t_{m,p}=t_{m',p'}\right\}.$$

Notons que l'on peut supposer sans perte de généralité que si p' est tel qu'il existe un entier m tel que $t_{m,p}=t_{m',p'}$, alors $p'\geq p$.

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} -\log \Omega^{p}_{k_0}\left(p^{-1}\right) &= -\log\left(c^{p}_{k_0}\right) + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right); \\ -\log \Omega^{p}_{k_0}\left(p'^{-1}\right) &= -\log\left(c^{p}_{k_0}\right) + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right). \end{aligned} \tag{A.23}$$

De plus d'après la propriété (2.32) du chapitre 2 on peut écrire pour tout nombre premier p

$$c^{p}_{k_0} = c_{k_0} p^{i\frac{\left\langle \gamma^0,\alpha_e\right\rangle}{\left\langle \theta,\alpha_e\right\rangle}},$$

où c_{k_0} ne dépend pas de p.

On remarque d'autre part que $\Re\left(\log\left(c_{k_0}\right)\right) = \log\left|c_{k_0}\right| \neq 0$ car $\left|c_{k_0}\right| = \left|c^{p}_{k_0}\right| < 1$.

Compte-tenu de $(A.23)$, l'égalité $t_{m,p} = t_{m',p'}$ fournit donc :

$$\frac{-\log\left(c_{k_0}\right) + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)}{\log(p)} + \frac{2i\pi m}{\log(p)} = \frac{-\log\left(c_{k_0}\right) + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)}{\log(p')} + \frac{2i\pi m'}{\log(p')}. \tag{A.24}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires de $(A.24)$, on obtient les estimations :

$$\begin{cases} -\log\left|c_{k_0}\right|\left(\dfrac{1}{\log(p)} - \dfrac{1}{\log(p')}\right) & = O\left(\dfrac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log(p)}\right), \\ -\arg\left(c_{k_0}\right)\left(\dfrac{1}{\log(p)} - \dfrac{1}{\log(p')}\right) + 2\pi\left(\dfrac{m}{\log(p)} - \dfrac{m'}{\log(p')}\right) & = O\left(\dfrac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log(p)}\right). \end{cases}$$

Et puisque $\log\left|c_{k_0}\right| \neq 0$, il vient :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\log(p)} - \dfrac{1}{\log(p')} & = O\left(\dfrac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log(p)}\right), \\ \dfrac{m}{\log(p)} - \dfrac{m'}{\log(p')} & = O\left(\dfrac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log(p)}\right). \end{cases} \tag{A.25}$$

La première ligne de $(A.25)$ permet d'affirmer que :

$$\log(p') - \log(p) = O\left(\frac{\log(p')}{p^{\vartheta_{k_0}}}\right).$$

Par conséquent il existe une constante absolue A_1 telle que si p' est tel qu'il existe m' vérifiant $t_{m',p'} = t_{m,p}$ alors :

$$\log(p') - \log(p) \leq A_1 \frac{\log(p')}{p^{\vartheta_{k_0}}}.$$

On a donc :

$$\log(p') \leq \frac{\log(p)}{1 - \frac{A_1}{p^{\vartheta_{k_0}}}} \leq \log(p)\left(1 + \frac{A_2}{p^{\vartheta_{k_0}}}\right);$$

où A_2 est une constante absolue (on peut par exemple choisir $A_2 = 2A_1$).

S'il existe m' tel que $t_{m',p'} = t_{m,p}$, alors p' satisfait nécessairement

$$p' \le p^{1+\frac{A_2}{p^{\vartheta_{k_0}}}}. \tag{A.26}$$

Pour p fixé, dénombrons le nombre $\mathcal{M}'(p)$ de p' satisfaisant $(A.26)$.

Pour cela on utilise le théorème des nombres premiers qui donne l'estimation suivante pour le nombre de nombres premiers $\pi(x)$ plus petits que x :

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)} + O\left(xe^{-c\sqrt{\log(x)}}\right);$$

où c est une constante absolue explicite.

On obtient donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}'(p) &= \pi\left(p^{1+A_2 p^{-\vartheta_{k_0}}}\right) - \pi(p)\\ &= \int_2^{p^{1+A_2p^{-\vartheta_{k_0}}}} \frac{dt}{\log(t)} + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right).\end{aligned}$$

Or on a uniformément en $t \in \left[p, p^{1+A_2p^{-\vartheta_{k_0}}}\right]$:

$$\log(t) = \log(p) + O\left(\log(p)\, p^{-\vartheta_{k_0}}\right);$$

ce qui fournit :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}'(p) &= \frac{1}{\log(p) + O\left(\log(p)\, p^{-\vartheta_{k_0}}\right)}\left(p^{1+A_2p^{-\vartheta_{k_0}}} - p\right) + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right)\\ &= O\left(\frac{p}{\log(p)}\left(p^{A_2p^{-\vartheta_{k_0}}} - 1\right)\right) + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right)\\ &= O\left(\frac{p}{\log(p)}\left(e^{A_2\log(p)p^{-\vartheta_{k_0}}} - 1\right)\right) + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right)\\ &= O\left(p^{1-\vartheta_{k_0}}\right) + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right)\\ &= O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right).\end{aligned}$$

Maintenant, ayant fixé un entier $m \in \mathbf{Z}$ et un nombre premier p, considérons un nombre premier p' vérifiant $(A.26)$ et estimons le nombre d'entiers m' tels que $t_{m,p} = t_{m',p'}$.

Compte-tenu de $(A.25)$, on a :

$$\frac{m}{\log(p)} - \frac{m'}{\log(p')} = O\left(\frac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log(p)}\right).$$

Mais puisque p' vérifie $(A.26)$, on a :

$$\log(p') = \log(p) + O\left(\log(p)\, p^{-\vartheta_{k_0}}\right);$$

et par conséquent :

$$\begin{array}{lcl} m - m'\dfrac{\log(p)}{\log(p')} & = & O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right) \\ m - m'\left(\dfrac{1}{1+O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)}\right) & = & O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right) \\ m - m'\left(1+O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\right) & = & O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right) \\ m - m' & = & O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right) + O\left(m'p^{-\vartheta_{k_0}}\right). \end{array}$$

D'autre part, si $t_{m',p'} \in \Delta_{\nu,\eta}$, alors d'après $(A.21)$ m' doit vérifier :

$$m' = O(\log(p')) = O(\log(p));$$

donc :

$$m - m' = O\left(\log(p)\, p^{-\vartheta_{k_0}}\right).$$

En particulier, pour p assez grand, $p > p_1$ (p_1 étant une constante absolue), on déduit :

$$|m - m'| < \frac{1}{2};$$

et :

$$m = m'.$$

Donc si $p > p_1$, les couples (m', p') tels que $t_{m',p'} = t_{m,p}$ sont nécessairement tels que $m = m'$.

Et finalement :

$$\mathcal{M}(m,p) = \mathcal{M}'(p) = O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right).$$

Pour conclure, si p est tel que $C_{k_0}^{\nu}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right) \leq p \leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)$, alors pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe en particulier une constante $\mathcal{K}_N$ qui dépend de N telle que pour tout $m \in \mathbf{N}$:

$$\mathcal{M}(m,p) \leq \mathcal{K}_N \frac{C_{k_0}^{\nu}}{\nu^N}.$$

Autrement dit pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a finalement :

$$S(\nu,\eta) \geq \frac{S^*(\nu,\eta)}{\mathcal{K}_N \frac{C_{k_0}^{\nu}}{\nu^N}} \sim \frac{\eta\left(C_{k_0}-1\right)}{\mathcal{K}_N 4\pi}\nu^N.$$

Pour $N > r+1$, on a en particulier que $(\nu+1)^{r+1}\log(\nu+1) = o(S(\nu,\eta))$ lorsque ν tend vers l'infini.

Finalement, les pôles de $A_{M_{\frac{1}{\nu+1}}}(\mathbf{s}^0+t\theta)$ dans $\Delta_{\nu,\eta}$ ne peuvent pas entièrement compenser les zéros qui proviennent de $\prod_{p\leq M_{\frac{1}{\nu+1}}} h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n}\right)$.

Il y a donc une accumulation des zéros de $Z(\mathbf{s}^0+t\theta)$ dans $\Delta_{\nu,\eta}$ et $\partial W(0)\cap\mathbf{R}^n$ est la frontière naturelle de $Z(\mathbf{s})$; ce qui complète la preuve du théorème. $\square$

Annexe B

Extension du théorème d'Estermann aux pseudo-polynômes d'une variable dont les puissances sont des réels positifs génériques.

B.1 Introduction

On considère dans toute la suite ce qu'on appellera un pseudo-polynôme d'une variable :

$$h(X) = 1 + a_1 X^{\alpha_1} + \cdots + a_r X^{\alpha_r}$$

et

$$Z(s) := \prod_{p\ premier} h(p^{-s})$$

où pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$ $a_j \in \mathbf{Z}$ et α_j est un nombre réel strictement positif. Le but de ce qui suit est de déterminer le domaine maximal de prolongement méromorphe du produit eulérien $Z(s)$.

Le cas où les α_j sont des entiers naturels fut traité par Estermann (voir [12] et son énoncé rappelé au théorème 5 dans le chapitre 2).

On aimerait être en mesure d'étendre ce résultat au cas où les α_j sont des réels strictement positifs génériques (la généricité se traduit ici par le fait que les α_j sont des réels strictement positifs $\mathbf{Q}$-algébriquement indépendants).

On peut observer pour commencer que $Z(s)$ définit une fonction holomorphe sur $W(1) := \{s \in \mathbf{C} \mid \ \forall j \in \{1, \ldots, r\}\ \Re(\alpha_j s) > 1\}$. D'autre part, le résultat montré par G. Bhowmik, D. Essouabri et B. Lichtin dans [2] se traduit ici par le fait qu'il existe un prolongement méromorphe de $Z(s)$ jusqu'à $\Re(s) > 0$. On sait également que le point 0 est un point d'accumulation de zéros ou de singularités et il ne peut donc exister de prolongement méromorphe si l'on translate globalement la droite $\Re(s) = 0$ vers la gauche.

Le problème ici consiste à montrer que l'axe imaginaire est vraiment la frontière naturelle de $Z(s)$ comme dans le théorème d'Estermann. On considérera dans un premier temps le cas d'un produit eulérien que l'on suppose se prolonger jusqu'à $\Re(s) > 0$ de la forme

$$E(s) := \prod_{(n_1,\ldots,n_r)\in\mathbf{N}^r} \zeta\left((n_1\alpha_1 + \cdots + n_r\alpha_r)\, s\right)^{\gamma(n_1,\ldots,n_r)}$$

où $\gamma(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbf{Z}$ pou tout $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbf{N}^r$. Il s'agira globalement d'adapter un argument développé par Dhalquist dans [8] lorqu'il généralisa le théorème d'Estermann aux fonctions entières avec des singularités isolées à l'intérieur du cercle unité.

Dans un second temps, on ramenera l'étude du produit eulérien $Z(s)$ au cas qui aura été traité préalablement.

Le principal intérêt de ce chapitre est de souligner l'un des points fondamentaux de cette thèse consistant à introduire une généricité dans le problème et à utiliser des arguments (comme le théorème de Baire au chapitre 2 ou ici le lemme 22) afin de ramener le problème de départ au cas générique.

B.2 Prolongement méromorphe et domaine maximal de méromorphie de $E(s) = \prod_{(n_1,\ldots,n_r)\in\mathbf{N}^r} \zeta((n_1\alpha_1 + \cdots + n_r\alpha_r)s)^{\gamma(n_1,\ldots,n_r)}$

Débutons cette partie en justifiant d'une part le fait que $E(s)$ est bien défini sur un certain demi-plan à condition de satisfaire une certaine propriété (voir (B.1)), et peut d'autre part être prolongé méromorphiquement sur le demi-plan $\Re(s) > 0$.

B.2.1 Convergence et prolongement méromorphe de $E(s)$

Proposition 7. *Soit (μ_i) une suite d'éléments tendant vers l'infini de $\mathbf{R}_+^*$ et soit (γ_i) une suite d'éléments de $\mathbf{Z}$. On suppose que*

$$\forall\delta > 0 \quad \sum \frac{|\gamma_i|}{2^{\mu_i\delta}} < +\infty. \tag{B.1}$$

Alors le produit

$$W(s) = \prod_{i=1}^{\infty} \zeta(\mu_i s)^{\gamma_i}$$

converge absolument et est holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > 1/(min_i\mu_i)$, et se prolonge en une fonction méromorphe sur le demi-plan $\Re(s) > 0$ avec des pôles éventuels appartenant à l'ensemble

$$\Phi = \left\{ \frac{1}{\mu_i}, \frac{\rho}{\mu_i} \mid i \in \mathbf{N}^*, \ \rho \text{ zéro non trivial de } \zeta(s) \right\}.$$

Preuve. On a

$$W(s) = \prod_{i=1}^{\infty} \zeta(\mu_i s)^{\gamma_i} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + (\zeta(\mu_i s)^{\gamma_i} - 1)).$$

L'étude de la convergence de $W(s)$ revient alors à celle de la convergence absolue de la série $\sum_{i=1}^{\infty} (\zeta(\mu_i s)^{\gamma_i} - 1)$. Estimons le terme principal de cette série lorsque n tend vers l'infini pour $\Re(s) > 1/(\min_i\mu_i)$:

$$\begin{aligned}
|\zeta(\mu_i s)^{\gamma_i} - 1| &= \left| \left(\sum_{m\geq 1} m^{-\mu_i s} \right)^{\gamma_i} - 1 \right| \\
&\asymp |\gamma_i| \left| \sum_{m\geq 2} m^{-\mu_i s} \right| \\
&\ll |\gamma_i| \int_2^{+\infty} t^{-\mu_i \Re(s)} dt \\
&= |\gamma_i| \left[(1 - \mu_i \Re(s))^{-1} t^{1-\mu_i \Re(s)} \right]_2^{+\infty} \\
&\ll |\gamma_i| (1 - \mu_i \Re(s))^{-1} 2^{1-\mu_i \Re(s)} \\
&\ll |\gamma_i| 2^{-\mu_i \Re(s)};
\end{aligned}$$

car $(\mu_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ est une suite qui tend vers l'infini avec i. L'hypothèse (B.1) de l'énoncé assure par conséquent la convergence absolue de la série, et donc le fait que le produit $W(s)$ converge absolument et est holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > 1/(\min_i\mu_i)$.

Montrons maintenant que $W(s)$ se prolonge méromorphiquement jusqu'à $\Re(s) > 0$. Pour cela, on prouve que $W(s)$ se prolonge de façon méromorphe jusqu'à $\Re(s) > \delta$, $\forall\delta > 0$.

Soit donc $\delta > 0$. Comme par hypothèse (μ_i) est une suite qui tend vers l'infini, il existe $i_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que l'on ait

$$\forall i \geq i_0 \quad \mu_i\delta > 1.$$

On écrit ensuite

$$W(s) = \prod_{i=1}^{i_0} \zeta(\mu_i s)^{\gamma_i} \prod_{i=i_0+1}^{\infty} \zeta(\mu_i s)^{\gamma_i}.$$

Notons $A(s) = \prod_{i=1}^{i_0} \zeta(\mu_i s)^{\gamma_i}$ et $B(s) = \prod_{i=i_0+1}^{\infty} \zeta(\mu_i s)^{\gamma_i}$.

Le produit $A(s)$ étant un produit fini de fonctions ζ se prolonge méromorphiquement au plan complexe $\mathbf{C}$ tout entier.

Il suffit pour terminer de vérifier que $B(s)$ converge et est holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > \delta$. Or de même que précédemment, on a pour s vérifiant $\Re(s) > \delta$ et $i \geq i_0 + 1$:

$$\begin{aligned}
|\zeta(\mu_i s)^{\gamma_i} - 1| &= \left| \left(\sum_{m \geq 1} m^{-\mu_i s} \right)^{\gamma_i} - 1 \right| \\
&\asymp |\gamma_i| \left| \sum_{m \geq 2} m^{-\mu_i s} \right| \\
&\ll |\gamma_i| \int_2^{+\infty} t^{-\mu_i \Re(s)} dt \\
&\ll |\gamma_i| \int_2^{+\infty} t^{-\mu_i \delta} dt \\
&= |\gamma_i| \left[(1 - \mu_i \delta)^{-1} t^{1-\mu_i \delta} \right]_2^{+\infty} \\
&\ll |\gamma_i| \, (1 - \mu_i \delta)^{-1} 2^{1-\mu_i \delta} \\
&\ll |\gamma_i| \, 2^{-\mu_i \delta}.
\end{aligned}$$

La série de terme général $(\zeta(\mu_i s)^{\gamma_i} - 1)$ pour $i \geq i_0 + 1$ est donc absolument convergente pour s tel que $\Re(s) > \delta$, ce qui implique la convergence et l'holomorphie de $B(s)$ sur le demi-plan $\Re(s) > \delta$.

Finalement, étant donné que $W(s) = A(s)B(s)$, avec $A(s)$ se prolongeant méromorphiquement sur $\mathbf{C}$ et $B(s)$ se prolongeant en une fonction holomorphe sur $\Re(s) > \delta$ pour tout $\delta > 0$, on obtient que $W(s)$ se prolonge de façon méromorphe jusqu'à $\Re(s) > \delta$, $\forall \delta > 0$, et donc que $W(s)$ se prolonge méromorphiquement jusqu'à $\Re(s) > 0$.

D'autre part, l'écriture précédente montre que les pôles éventuels de $W(s)$ proviennent de zéros ou de pôles de fonctions ζ ; on peut ainsi affirmer que les pôles éventuels de $W(s)$ appartiennent à l'ensemble

$$\Phi = \left\{ \frac{1}{\mu_i}, \frac{\rho}{\mu_i} \mid i \in \mathbf{N}^*, \ \rho \text{ zéro non trivial de } \zeta(s) \right\}.$$

La proposition est donc montrée. □

Corollaire B.2.1. Si les puissances $\gamma(n_1, \ldots, n_r)$ de $E(s)$ vérifient :

$$\forall \delta > 0 \quad \sum \frac{|\gamma(n_1, \ldots, n_r)|}{2^{(n_1\alpha_1 + \cdots + n_r\alpha_r)\delta}} < +\infty, \tag{B.2}$$

alors ce produit converge absolument et définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > 1/(\min_{i=1,\ldots,r}\alpha_i)$, et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\Re(s) > 0$.

B.2.2 Domaine maximal de méromorphie de $E(s)$

Le but est ici de montrer que l'axe imaginaire est frontière naturelle de $E(s)$.

L'énoncé du théorème que l'on veut montrer dans cette partie est le suivant :

Théorème 18. *Soit* $E(s) = \prod_{(n_1,\ldots,n_r)\in\mathbf{N}^r} \zeta((n_1\alpha_1 + \cdots + n_r\alpha_r)s)^{\gamma(n_1,\ldots,n_r)}$ *tel que les puissances* $\gamma(n_1,\ldots,n_r)$ *vérifient la condition (B.2) et où les* α_i *sont des réels strictement positifs* **Q***-algébriquement indépendants.*

Soit $\Gamma = \{(n_1,...,n_r) \mid \gamma(n_1,...,n_r) \neq 0\}$.

Alors :

- *si* Γ *est fini,* $E(s)$*, étant un produit fini de fonctions* ζ*,et donc se prolonge en une fonction méromorphe à* **C** *tout entier.*
- *Sinon* $E(s)$ *se prolonge de façon méromorphe jusqu'à* $\Re(s) > 0$*, et la droite* $\Re(s) = 0$ *est une frontière naturelle pour* $E(s)$*.*

On va montrer qu'il y a une infinité de singularités ou de zéros de $E(s)$ dans tout rectangle

$$R(t,\epsilon) := \{s = \sigma + i\tau, 0 \leq \sigma \leq 1, (1-\epsilon)t \leq \tau \leq (1+\epsilon)t\};$$

où l'on suppose, sans perte de généralité, que $t > 0$ et $0 < \epsilon < \frac{1}{3}$.

Ces singularités ou zéros proviennent de ceux des ζ-facteurs qui apparaissent dans $E(s)$. Cependant, il faut vérifier qu'il n'y a pas "compensation" des singularités et des zéros des ζ-facteurs.

Nous avons besoin d'énoncer quelques lemmes qui seront nécessaires dans la démonstration du théorème principal de cette partie.

Le lemme suivant, dont la preuve est rappelée au chapitre 2 page 140, est tiré de Dhalquist [8].

Lemme 21 (voir [8])**.** *Pour tout* $\eta > 0$ *et pour tout* T *assez grand, il existe une ligne droite passant par 0 qui contient des zéros de la fonction* ζ *de Riemann dans* $R(T,\eta)$*, mais aucun en dehors de* $R(T,\eta)$*.*

Preuve. Voir l'article de Dhalquist ([8] p. 538) ou le lemme 19 page 140. □

Lemme 22. *On considère l'algèbre* $A = \mathbf{Z}[\alpha_1,\ldots,\alpha_r]$ *engendrée par* $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$*. On suppose que* $\alpha_1,...,\alpha_r$ *sont* **Q***-algébriquement indépendants. Si* $x \in A$ *et pour* $j \in \{1,...,r\}$*, notons* $\mathrm{Val}_{\alpha_j}(x) = max\{k \in \mathbf{N} \mid \exists x' \in A, x = \alpha_j^k x'\}$ *la valuation de* x *en* α_j*.*

Alors si $x, y \in A,\ x, y \neq 0$*, et si* x^**,* y^* *sont tels que* $x = \alpha_1^{\mathrm{Val}_{\alpha_1}(x)} \cdots \alpha_r^{\mathrm{Val}_{\alpha_r}(x)} x^*$ *et* $y = \alpha_1^{\mathrm{Val}_{\alpha_1}(y)} \cdots \alpha_r^{\mathrm{Val}_{\alpha_r}(y)} y^*$*, l'écriture de* $z := \frac{x^*}{y^*}$ *est unique modulo les multiples entiers de* (x^*, y^*) *; c'est à dire qu'il n'existe pas de couple* (x', y')*, avec x' et y' de valuation nulle en chacun des* α_i*, tel que* $x^* \neq x'$ *ou* $y^* \neq y'$ *et* $z = \frac{x'}{y'}$ *hormis les* $(x', y') = (nx^*, ny^*)$ *pour* $n \in \mathbf{Z}$*,* $n \neq 0$*.*

Preuve. Du fait que, par hypothèse, les $\alpha_i, i = 1, ..., r$ sont $\mathbf{Q}$-algébriquement indépendant, on a l'isomorphisme d'anneau :

$$\mathbf{Z}[\alpha_1, ..., \alpha_r] \simeq \mathbf{Z}[X_1, ..., X_r].$$

Il suffit alors de remarquer que $\mathbf{Z}[X_1, ..., X_r]$ est un anneau factoriel pour conclure. $\square$

On est désormais en mesure d'écrire le corps de la démonstration du théorème.

Preuve de la proposition. Soit $R(u, \eta)$ avec $u > 0$ et $\eta > 0$. Soit $(n_1^0, ..., n_r^0)$ tel que $R((n_1^0\alpha_1 + \cdots + n_r^0\alpha_r)u, \eta)$ contienne une droite L_0 passant par un zéro z^0 de $\zeta(s)$ dans $R((n_1^0\alpha_1 + \cdots + n_r^0\alpha_r)u, \eta)$, mais ne passant par aucun zéro en dehors de ce rectangle. Ainsi, $z^0(n_1^0\alpha_1 + \cdots + n_r^0\alpha_r)^{-1}$ est un zéro ou une singularité de E(s) dans $R(u; \eta)$.

Supposons maintenant par l'absurde qu'il y ait un zéro z^1 de $\zeta(s)$ et $(m_1^1, \ldots, m_r^1)$ tels que

$$(m_1^1, \ldots, m_r^1) \neq (n_1^0, \ldots, n_r^0) \ et \ \frac{z^0}{(n_1^0\alpha_1 + \cdots + n_r^0\alpha_r)} = \frac{z^1}{(m_1^1\alpha_1 + \cdots + m_r^1\alpha_r)}.$$

On a alors nécessairement $z^1 \neq z^0$ et

$$z^1 \in L_0, \text{ donc } z^1 \in R(u(n_1^0\alpha_1 + \cdots + n_r^0\alpha_r), \eta).$$

Maintenant, on considère

$$\frac{z^1}{n_1^0\alpha_1 + \cdots + n_r^0\alpha_r} \in R(u, \eta).$$

Alors si rien ne compense $\frac{z^1}{n_1^0\alpha_1 + \cdots + n_r^0\alpha_r} \in R(u, \eta)$, on obtient ce qu'on voulait.

Sinon, il existe un zéro z^2 de $\zeta(s)$ et $(m_1^2, \ldots, m_r^2)$ tels que

$$\frac{z^1}{(n_1^0\alpha_1 + \cdots + n_r^0\alpha_r)} = \frac{z^2}{(m_1^2\alpha_1 + \cdots + m_r^2\alpha_r)}.$$

D'où

$$z^2 = \frac{(m_1^2\alpha_1 + \cdots + m_r^2\alpha_r)}{(n_1^0\alpha_1 + \cdots + n_r^0\alpha_r)} z^1$$

et $z^2 \in L$; de plus $z^2 \neq z^1$ si $(m_1^2, \ldots, m_r^2) \neq (n_1^0, \ldots, n_r^0)$.

D'autre part, $z^2 \neq z^0$ puisque sinon on aurait

$$\frac{(m_1^2\alpha_1 + \cdots + m_r^2\alpha_r)z^1}{(n_1^0\alpha_1 + \cdots + n_r^0\alpha_r)^2} = \frac{z^2}{(n_1^0\alpha_1 + \cdots + n_r^0\alpha_r)} = \frac{z^0}{(n_1^0\alpha_1 + \cdots + n_r^0\alpha_r)} = \frac{z^1}{(m_1^1\alpha_1 + \cdots + m_r^1\alpha_r)},$$

ce qui est impossible en vertu du lemme 22 précédent.

Et ainsi de suite... On construit ainsi une suite $(z^i)_{i \geq 0}$ de zéros de $\zeta(s)$ se situant tous sur L_0, et donc dans le rectangle $R(n^0u, \eta)$.

Montrons que les z^i sont tous des zéros distincts de $\zeta(s)$:

Notation On note par soucis de commodité

$$(n_1^0\alpha_1 + \cdots + n_r^0\alpha_r) = n^0; (n_1^1\alpha_1 + \cdots + n_r^1\alpha_r) = n^1 \cdots$$

Lemme 23. *Les termes de la suite* $(z^i)_{i\geq 0}$ *d'éléments de* $R(n^0u, \eta)$ *construite précédemment sont deux à deux distincts.*

Preuve. On montre que les z^i sont tous distincts par récurrence sur i :

On a bien

$$z^0 \neq z^1 \neq z^2.$$

Maintenant supposons que les $\{z^j, j \leq k\}$ soient tous distincts et montrons que l'on a bien $z^{k+1} \neq z^j$ pour tout $j = 0, \dots, k$. Supposons par l'absurde qu'il existe $j \in \{0, \dots, k\}$ tel que $z^j = z^{k+1}$.

• Si $j < k$: On a

$$z^j = \frac{n^0 z^{j+1}}{m^{j+1}} = \frac{(n^0)^2 z^{j+2}}{m^{j+1}m^{j+2}} = \cdots = \frac{(n^0)^{k-j} z^k}{m^{j+1}\cdots m^k}$$

et

$$z^j = z^{k+1} = \frac{m^{k+1}z^k}{n^0},$$

d'où

$$\frac{z^j}{(n^0)^{k-j-1}} = \frac{n^0 z^k}{m^{j+1}\cdots m^k} = \frac{m^{k+1}z^k}{(n^0)^{k-j}},$$

et par conséquent

$$\frac{n^0}{m^{j+1}...m^k} = \frac{m^{k+1}}{(n^0)^{k-j}}.$$

Si maintenant on suppose dans un premier temps que n^0 contient au moins deux composantes distinctes $n^0_{t_1}$ et $n^0_{t_2}$ non nulles avec $t_1, t_2 \in \{1, \dots, r\}$, alors $\mathrm{Val}_{\alpha_{t_1}} n^0 = 0$ et

$$\mathrm{Val}_{\alpha_{t_1}}\left(\frac{n^0}{m^{j+1}...m^k}\right) = \mathrm{Val}_{\alpha_{t_1}}\left(\frac{m^{k+1}}{(n^0)^{k-j}}\right).$$

Or

$$\mathrm{Val}_{\alpha_{t_1}}\left(\frac{n^0}{m^{j+1}...m^k}\right) = \mathrm{Val}_{\alpha_{t_1}}\left(\frac{1}{m^{j+1}...m^k}\right) \leq 0,$$

et

$$\mathrm{Val}_{\alpha_{t_1}}\left(\frac{m^{k+1}}{(n^0)^{k-j}}\right) = \mathrm{Val}_{\alpha_{t_1}}\left(m^{k+1}\right) \geq 0,$$

donc

$$\mathrm{Val}_{\alpha_{t_1}}\left(m^{j+1}...m^k\right) = \mathrm{Val}_{\alpha_{t_1}}\left(m^{k+1}\right) = \mathrm{Val}_{\alpha_{t_1}} n^0 = \mathrm{Val}_{\alpha_{t_1}}\left(n^0\right)^{k-j} = 0.$$

On peut donc appliquer le lemme 22 qui donne l'existence d'un entier n tel que

$$n^0 = nm^{k+1}, m^{j+1}...m^k = n(n^0)^{k-j}.$$

En particulier, on obtient que :

$$z^{k+1} = \frac{1}{n} z^k,$$

On a donc, puisque $z^k \in R(n^0u, \eta)$:

$$\Im(z^{k+1}) = \frac{1}{n}\Im(z^k) \leq \frac{(1+\eta)un^0}{n} \leq \frac{(1+\eta)un^0}{2},$$

si $n \neq 1$.

Or, puisque $\eta < \frac{1}{3}$:

$$\frac{(1+\eta)un^0}{2} < (1-\eta)un^0;$$

et par conséquent on ne peut avoir $z^{k+1} \in R(n^0u, \eta)$. Il y a donc contradiction, et z^{k+1} est bien distinct de z^j

Si on suppose maintenant que n^0 n'a qu'une seule composante non nulle (on peut supposer par exemple que l'on a $n^0 = n_0\alpha_1$), alors $\mathrm{Val}_{\alpha_1}(n^0) = 1$ et

$$\mathrm{Val}_{\alpha_1}\left(\frac{n^0}{m^{j+1}\cdots m^k}\right) = 1 - \mathrm{Val}_{\alpha_1}\left(m^{j+1}\cdots m^k\right) = 1 - \mathrm{Val}_{\alpha_1}(m^{j+1}) - \cdots - \mathrm{Val}_{\alpha_1}(m^k),$$

tandis que

$$\mathrm{Val}_{\alpha_1}\left(\frac{m^{k+1}}{(n^0)^{k-j}}\right) = \mathrm{Val}_{\alpha_1}(m^{k+1}) - (k-j),$$

d'où

$$1 - \mathrm{Val}_{\alpha_1}\left(m^{j+1}\right) - \cdots - \mathrm{Val}_{\alpha_1}(m^k) = \mathrm{Val}_{\alpha_1}(m^{k+1}) + j - k.$$

On a donc :

$$\mathrm{Val}_{\alpha_1}(m^{k+1}) + \mathrm{Val}_{\alpha_1}(m^k) + \cdots + \mathrm{Val}_{\alpha_1}(m^{j+1}) = 1 + k - j,$$

et

$$\forall t \in \{j+1, \ldots, k+1\}, 0 \leq \mathrm{Val}_{\alpha_1}(m^t) \leq 1.$$

Ainsi,

$$\forall t \in \{j+1, \ldots, k+1\}, \mathrm{Val}_{\alpha_1}(m^t) = 1.$$

On divise finalement n^0 et tous les $m^t, t \in \{j+1, \ldots, k+1\}$ par α_1 pour se ramener à l'analyse précédente et appliquer le lemme 22.

• Si $j = k$: On a par définition

$$z^{k+1} = \frac{m^{k+1}}{n^0} z^k,$$

et puisque $m^{k+1} \neq n^0$, on ne peut avoir $z^j = z^{k+1}$; ce qui achève la démonstration du lemme. □

Si on suppose maintenant que tous les zéros $\rho(n_1^0\alpha_1 + \cdots + n_r^0\alpha_r)^{-1}$ (ρ étant un zéro ou pôle de $\zeta(s)$) sont compensés dans $R(u, \eta)$, on obtient alors une suite infinie composée de zéros de $\zeta(s)$ tous distincts sur L_0.

Or on a vu que tout zéro de $\zeta(s)$ situé sur L_0 se trouve en fait dans le rectangle $R(n^0u, \eta)$. On aurait donc une accumulation de zéros de $\zeta(s)$ dans $R(n^0u, \eta)$ (plus précisément une accumulation de zéros de $\zeta(s)$ sur $L_0 \cap R(n^0u, \eta)$).

Or $\zeta(s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier ; la situation précédente ne peut donc se produire.

On peut par conséquent trouver sur $L_0 \cap R(u, \eta)$ au moins un zéro ou une singularité $\rho^0(n_1^0\alpha_1 + \cdots + n_r^0\alpha_r)^{-1}$ de $E(s)$ qui n'est compensé par aucun $\rho(m_1\alpha_1 + \cdots + m_r\alpha_r)^{-1}$.

Ensuite, on considère $(n_1^1, ..., n_r^1) \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que $R((n_1^1\alpha_1 + ... + n_r^1\alpha_r)u, \eta) \cap R((n_1^0\alpha_1 + ... + n_r^0\alpha_r)u, \eta) = \emptyset$, c'est à dire tel que

$$(n_1^1\alpha_1 + ... + n_r^1\alpha_r) > \left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)(n_1^0\alpha_1 + ... + n_r^0\alpha_r);$$

et de telle sorte que $R((n_1^1\alpha_1 + ... + n_r^1\alpha_r)u, \eta)$ contienne une droite $L_1 \neq L_0$ passant par un zéro de $\zeta(s)$ dans $R((n_1^1\alpha_1 + ... + n_r^1\alpha_r)u, \eta)$, mais ne passant par aucun zéro en dehors de ce rectangle.

Le même raisonnement que celui qui vient d'être expliqué s'applique et permet d'affirmer qu'il existe sur $L_1 \cap R(u, \eta)$ au moins un zéro ou une singularité $\rho^1(n_1^1\alpha_1 + \cdots + n_r^1\alpha_r)^{-1}$ de $E(s)$ qui n'est pas compensé.

Et ainsi de suite, on obtient une infinité de droites L_c deux à deux distinctes passant par l'origine pour $c \in \mathbf{N}^*$, de pente tendant vers l'infini à mesure que c croît, contenant chacune au moins un zéro ou une singularité de $E(s)$ qui n'est pas compensé.

Finalement, dans tout rectangle $R(u, \eta)$, on a trouvé une infinité de singularités ou de zéros de $E(s)$.

La démonstration est ainsi terminée. □

B.3 Domaine maximal de méromorphie de $Z(s) := \prod_{p\,\text{premier}} (1 + a_1 p^{-\alpha_1 s} + \cdots + a_r p^{-\alpha_r s})$

On considère $h(X) = 1 + a_1 X^{\alpha_1} + \cdots + a_r X^{\alpha_r}$ où $a_j \in \mathbf{Z}$ et les $\alpha_j > 0$ sont des réels $\mathbf{Q}$-algébriquement indépendants. On pose $Z(s) = \prod_p h(p^{-s})$.

Tout d'abord, le théorème tiré de [2], dont l'énoncé général est rappelé au théorème 6 page 28, montre que $Z(s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\Re(s) > 0$ et précise de plus sa caractérisation sur $\Re(s) > \delta$, pour tout $\delta > 0$:

Théorème 19 (Bhowmik, Essouabri et Lichtin, c.f. [2])**.** *La fonction $Z(s)$ peut se prolonger méromorphiquement jusqu'à $\Re(s) > 0$. De plus, pour chaque $\delta > 0$, il existe un produit eulérien $G_\delta(s)$ borné, absolument convergent sur $\Re(s) > \delta$ tel que*

$$Z(s) = \prod_{\substack{\boldsymbol{n}=(n_1,\ldots,n_r)\in\mathbf{N}^r \\ 1\le n_1+\cdots+n_r\le[\delta^{-1}]}} \zeta\Big(\sum_{j=1}^{r} n_j \alpha_j s\Big)^{\gamma(\boldsymbol{n})} G_\delta(s). \tag{B.3}$$

Preuve. Voir l'article [2] pour une démonstration complète. □

Expliquons tout de même la stratégie de la preuve.

Définition 26. Pour $m \in \mathbf{N}$, soit :

$$L_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \{n_1\alpha_1 + \cdots + n_r\alpha_r :\ n_1 + ...n_r = m\};$$

on dit alors qu'une combinaison linéaire $n_1\alpha_1 + \cdots + n_r\alpha_r$ est de poids k si $n_1\alpha_1 + \cdots + n_r\alpha_r \in L_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. On définit aussi :

$$\overline{L}_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \bigcup_{j\ge m} L_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \{n_1\alpha_1 + \cdots + n_r\alpha_r :\ n_1 + \cdots + n_r \ge m\}.$$

Le procédé de factorisation du produit $Z(s)$ par des fonctions ζ du théorème 19 consiste tout d'abord à augmenter le poids des puissances des monômes de $h(X)$; de façon concrète on multiplie $h(X)$ par $(1 - X^{\alpha_i})^{a_i}$ pour $i = 1, \ldots, r$, de sorte qu'on obtient une 'pseudo' série entière dont les monômes sont de poids au moins égal à 2. Remarquons d'autre part que cette multiplication se traduit au niveau des produits eulériens par un produit fini de fonctions ζ. Cette première étape permet ainsi de prolonger $Z(s)$ au demi-plan $\Re(s) > 1/\min_{i,j}(\alpha_i + \alpha_j)$.

L'étape suivante consiste ensuite à multiplier la 'pseudo' série entière obtenue à la fin de la première étape par des facteurs de la forme $(1 - X^{\alpha_j+\alpha_k})^{a_{j,k}}$ pour $j, k \in \{1, ..., r\}$, ceci afin d'obtenir une nouvelle 'pseudo' série entière ne contenant que des monômes dont les puissances sont de poids supérieur ou égal à 4. Le produit $Z(s)$ se prolonge alors jusqu'à $\Re(s) > 1/\min_{i,j,k,l}(\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k + \alpha_l)$.

On réitère ce processus pour aboutir au résultat énoncé dans le théorème 19.

Remarque 20. 1. Les combinaisons linéaires en les α_k qui apparaissent à la fin de l'étape n en tant que puissances de monômes de la 'pseudo' série entière obtenue sont de poids supérieur ou égal à 2^n.

2. Contrairement au cas de $E(s)$, il n'est pas nécessaire d'imposer une condition sur les puissances $\gamma(\mathbf{n})$ (telle que (B.2)) pour assurer l'existence d'une région sur laquelle $Z(s)$ est bien définie ; on sait en effet que $Z(s)$ est holomorphe dans $W(1)$ et se prolonge de façon méromorphe dans $W(0)$.

On peut par ailleurs étendre le résultat obtenu dans le théorème 3 à une classe de produits eulériens un peu plus large :

Théorème 20. *Soit $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers l'infini. On considère $h(X) = 1 + \sum_{k\geq 1} a_k X^{\alpha_k}$ et $Z_{(\alpha_k)_{k\geq 1}}(s) = \prod_p h(p^{-s})$. Alors la fonction $Z_{(\alpha_k)_{k\geq 1}}(s)$ peut se prolonger méromorphiquement jusqu'à $\Re(s) > 0$. De plus, pour chaque $\delta > 0$, il existe un produit eulérien $G_\delta(s)$ borné, absolument convergent sur $\Re(s) > \delta$ tel que*

$$Z_{(\alpha_k)_{k\geq 1}}(s) = \prod_{1\leq n_1+\cdots+n_k+\ldots\leq[\delta^{-1}]} \zeta\left(\sum_{k\geq 1} n_k\alpha_k s\right)^{\gamma(n_1,\ldots,n_k,\ldots)} G_\delta(s).$$

Preuve. On étudie :

$$\prod_p h(p^{-s}) = Z_{(\alpha_k)_{k\geq 1}}(s).$$

Premièrement, $Z_{(\alpha_k)_{k\geq 1}}(s)$ converge absolument pour $\Re(s) > 1/\min_{k\geq 1}(\alpha_k)$.

1. Posons $\alpha_{k_0} = min_{k\geq 1}(\alpha_k)$. On multiplie $Z_{(\alpha_k)_{k\geq 1}}(s)$ par $\zeta(\alpha_{k_0}s)^{-a_{k_0}}$; on obtient :

$$Z_1(s) = Z_{(\alpha_k)_{k\geq 1}}(s)\zeta\left(\alpha_{k_0}s\right)^{-a_{k_0}}$$

$$= \prod_p \left(\left(1-p^{-s\alpha_{k_0}}\right)^{a_{k_0}}\left(1+a_1p^{-s\alpha_1}+\cdots+a_{k_0}p^{-s\alpha_{k_0}}+\cdots+a_kp^{-s\alpha_k}+\cdots\right)\right)$$

$$= \prod_p \left(1+a^1_{\alpha^1_1}p^{-s\alpha^1_1}+\cdots+a^1_{\alpha^1_k}p^{-s\alpha^1_k}+\cdots\right)$$

où les α^1_k sont des combinaisons linéaires en les α_k et $\forall k\geq 1, \alpha^1_k > \alpha_{k_0}$.
$Z_1(s)$ converge absolument pour $\Re(s) > 1/\min_k(\alpha^1_k)$ et $1/\min_k(\alpha^1_k) < 1/min_k(\alpha_k)$.

2. On pose $\alpha^1_{k_1} = \min_k(\alpha^1_k)$. On multiplie $Z_1(s)$ par $\zeta(\alpha^1_{k_1}s)^{-a^1_{\alpha_{k_1}}}$; on obtient :

$$Z_2(s) = Z_1(s)\zeta(\alpha^1_{k_1}s)^{-a^1_{\alpha_{k_1}}} = \prod_p\left(1+a^2_{\alpha^2_1}p^{-s\alpha^2_1}+\cdots+a^2_{\alpha^2_k}p^{-s\alpha^2_k}+\cdots\right)$$

où les α^2_k sont des combinaisons linéaires en les α_k.
$Z_2(s)$ converge absolument pour $\Re(s) > 1/\min_k(\alpha^2_k)$ et $1/\min_k(\alpha^2_k) < 1/\min_k(\alpha^1_k) < 1/\min_k(\alpha_k)$.

Et ainsi de suite...

Finalement, en utilisant le fait que la fonction ζ de Riemann se prolonge de façon méromorphe à $\mathbf{C}$ tout entier et en remarquant que la suite $(\min_k(\alpha_k^m))_{m\geq 1}$ est croissante non majorée (ses termes étant tous combinaisons d'entiers naturels en les α_i, la différence entre deux de ses termes est supérieure ou égale à $\min_i(\alpha_k)$), on constate que le procédé décrit plus haut, « dérivé »de la méthode explicitée dans [2], montre que $Z_{(\alpha_k)_{k\geq 1}}(s)$ se prolonge méromorphiquement à $\Re(s) > 0$. □

On souhaite désormais vérifier que l'axe imaginaire est une frontière naturelle de $Z(s)$ (sauf si biensûr $Z(s)$ est un produit fini de fonctions ζ). Là encore, de même qu'à la section précédente, on va montrer qu'il y a une infinité de pôles ou de zéros de $Z(s)$ dans tout rectangle

$$R(t,\epsilon) := \{s = \sigma + i\tau, 0 \leq \sigma \leq 1, (1-\epsilon)t \leq \tau \leq (1+\epsilon)t\}.$$

Il faut cependant justifier le fait que l'on peut appliquer le raisonnement établi pour le produit $E(s)$ précédent. En effet, il se pourrait a priori que les singularités trouvées en procédant comme dans la section B.2.2 soient compensées par des zéros provenant de $G_\delta(s)$ pour un $\delta > 0$.

Il convient donc de vérifier précisément l'existence d'une infinité de zéros de $Z(s)$ dans tout rectangle $R(u,\eta)$; ce qui revient, compte-tenu de ce qui a été établi en première partie, à montrer l'existence d'une infinité de puissances strictement positives $\gamma(n)$ dans l'écriture (B.3) à mesure que δ décroît vers 0.

Débutons par la formulation de quelques définitions.

Définition 27. Si $h(X) = 1 + \sum_{\gamma\in\overline{L}_0(\alpha_1,\dots,\alpha_r)} a_\gamma X^\gamma$, on note :

$$S(h) = \{\gamma \in \overline{L}_0(\alpha_1,\dots,\alpha_r) | a_\gamma \neq 0\}.$$

Pour $\gamma \in \overline{L}_0(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$, $\gamma = \sum_{i=1}^r n_i\alpha_i$, on écrit :

$$P(\gamma) = \sum_{i=1}^r n_i.$$

On définit aussi :

$$P(h) = \min\{P(\gamma) | \gamma \in S(h)\}.$$

Pour finir, on note :

$$\mathrm{Ext}(h) = \{\gamma \in S(h) | P(\gamma) = P(h)\}, C_h = \{a_\gamma, \gamma \in \mathrm{Ext}(h)\}.$$

L'objectif de cette section est de montrer le théorème suivant :

Théorème 21. *Soit* $Z(s) := \prod_{p\ premier} (1 + a_1 p^{-\alpha_1 s} + \cdots + a_r p^{-\alpha_r s})$ *où* $a_j \in \mathbf{Z}$ *pour tout* $j \in \{1, \ldots, r\}$ *et les* α_j *sont des réels strictement positifs* $\mathbf{Q}$*-algébriquement indépendants.*

Soit $\Gamma = \{(n_1, ..., n_r) \mid \gamma(n_1, ..., n_r) \neq 0\}$ *(les* $\gamma(n_1, ..., n_r)$ *étant ceux de l'écriture (B.3) du théorème 19).*

Alors :

- *si* Γ *est fini,* $Z(s)$*, étant un produit fini de fonctions zéta, se prolonge en une fonction méromorphe à* $\mathbf{C}$ *tout entier.*
- *Sinon* $Z(s)$ *se prolonge de façon méromorphe jusqu'à* $\Re(s) > 0$*, et la droite* $\Re(s) = 0$ *est une frontière naturelle pour* $Z(s)$ *: tout point de l'axe imaginaire est point d'accumulation de zéros ou de pôles de* $Z(s)$*.*

Preuve. Le problème consiste savoir si, dans le procédé décrit plus haut, on a l'apparition d'un nombre infini de puissances strictement positives dans l'écriture du produit eulérien en un produit de puissances de fonctions ζ.

Ecrivons :

$$h(X) = 1 + \sum_{\gamma \in \mathrm{Ext}(h)} a_\gamma X^\gamma + \sum_{\gamma \in S(h) \setminus \mathrm{Ext}(h)} a_\gamma X^\gamma.$$

Si $C_h \cap \mathbf{R}_+^* = \emptyset$, alors on considère :

$$\widetilde{h}(X) = \frac{1}{h(X)} = 1 - a_1 X^{\alpha_1} - \cdots - a_r X^{\alpha_r} + (-a_1 X^{\alpha_1} - \cdots - a_r X^{\alpha_r})^2 + \cdots + (\cdots)^n + \cdots,$$

de telle sorte que :

$$C_{\widetilde{h}} = -C_h;$$

et donc $C_{\widetilde{h}} \cap \mathbf{R}_+^* \neq \emptyset$.

Etant donné que $\prod_p h(p^{-s})$ et $\prod_p \widetilde{h}(p^{-s})$ ont le même domaine de méromorphie, on peut ainsi supposer sans perte de généralité que :

$$C_h \cap \mathbf{R}_+^* \neq \emptyset.$$

A la première étape, la 'pseudo'-série entière associée au produit qui apparaît est exactement :

$$Th(X) = \prod_{\gamma \in \mathrm{Ext}(h)} (1 - X^\gamma)^{-a_\gamma} h(X);$$

et $P(Th) \geq P(h) + 1$.

Si maintenant la 'pseudo'-série $T^{(n)}h$ obtenue à chaque étape $n \geq 1$ est telle que $C_{T^{(n)}h} \cap \mathbf{R}_+^* \neq \emptyset$, alors c'est terminé car l'écriture (B.3) possède une infinité de puissances $\gamma(n_1, \ldots, n_r)$ strictement positives.

Sinon, il existe k_0 telle qu'à l'étape k_0 on ait :

$$h(X) = T^{(k_0)}h(X) \prod_{i \in I_1\ fini} (1 - X^{\beta_i^1})^{\epsilon_i^1} = h_1(X) \prod_{i \in I_1\ fini} (1 - X^{\beta_i^1})^{\epsilon_i^1},$$

avec $\forall i \in I_1, P(h_1) > P(\beta_i^1)$, $\{\epsilon_i^1, i \in I_1\} \cap \mathbf{R}_+^* \neq \emptyset$ et $C_{h_1} \cap \mathbf{R}_+^* = \emptyset$.

On considère ensuite $\widetilde{h_1}(X) = \frac{1}{h_1(X)}$ qui vérifie :

$$C_{\widetilde{h_1}} \cap \mathbf{R}_+^* \neq \emptyset.$$

Si le procédé de factorisation par des fonctions ζ appliqué à $\widetilde{h_1}$ fournit une infinité de puissances strictement positives, c'est terminé car $\prod_p \widetilde{h_1}(p^{-s})$ et $\left(\prod_p h(p^{-s})\right)^{-1}$ sont égaux modulo un produit fini de fonctions ζ.

Sinon, on a :

$$\widetilde{h_1}(X) = h_2(X) \prod_{i \in I_2 \ fini} (1 - X^{\beta_i^2})^{\epsilon_i^2}$$

avec $\forall i \in I_2, P(h_2) > P(\beta_i^2) > P(h)$, $\{\epsilon_i^2, i \in I_2\} \cap \mathbf{R}_+^* \neq \emptyset$ et $C_{h_2} \cap \mathbf{R}_+^* = \emptyset$.

Et on considère

$$\widetilde{h_2}(X) = \frac{1}{h_2(X)},$$

vérifiant $C_{\widetilde{h_2}} \cap \mathbf{R}_+^* \neq \emptyset$; et ainsi de suite...

Maintenant, soit le procédé que l'on vient de décrire a une fin, c'est à dire qu'il existe t tel que $\prod_p h_t(p^{-s})$ ait une infinité de puissances strictement positives dans sa factorisation en fonctions ζ ; et le théorème est montré puisque l'étude de $\prod_p h(p^{-s})$ revient à étudier $\prod_p h_t(p^{-s})$ (puisque $\prod_p h_t(p^{-s})$ vaut $\prod_p h(p^{-s})$ ou $\left(\prod_p h(p^{-s})\right)^{-1}$ selon la parité de t modulo un produit fini de fonctions ζ).

Soit ce processus n'a pas de fin ; mais là encore on obtient une infinité de puissances strictement positives dans l'écriture de $\prod_p h(p^{-s})$ en produit de fonctions ζ.

En effet :

$$\text{pour tout } m \in \mathbf{N}^*, \ h(X) = h_1(X) \prod_{i \in I_1 \ fini} (1 - X^{\beta_i^1})^{\epsilon_i^1} = h_{2m}(X) \prod_{i \in I_{2m} \ fini} (1 - X^{\beta_i^{2m}})^{\epsilon_i^{2m}};$$

et pour tout $m \in \mathbf{N}^*, \{\epsilon_i^{2m}, i \in I_{2m}\} \cap \mathbf{R}_+^* \neq \emptyset$ et les β_i^{2m} sont tous deux à deux distincts puisqu'ils sont de poids échelonnés et que par hypothèse $\alpha_1, ..., \alpha_r$ sont $\mathbf{Q}$-algébriquement indépendants.

Finalement, quitte à remplacer $h(X)$ par une autre 'pseudo'-série entière qui lui est égale ou égale à son inverse modulo un produit fini $\prod_{i \in J \ fini} (1 - X^{\beta_i})^{\epsilon_i}$, ce qui ne change pas l'étude du domaine de méromorphie des produits eulériens correspondants, on peut supposer l'existence d'un nombre infini de puissances strictement positives dans l'écriture de $\prod_p h(p^{-s})$ en produits de fonctions ζ ; ce qui complète la preuve du théorème.

□

Deuxième partie

English translation.

Chapitre 6

Introduction in English.

6.1 Introduction.

In this thesis we study the maximal domain of meromorphy of uniform Euler products of one or many variables.

We call "uniform product" the subclass of multivariable Dirichlet series made of the following functions :

Définition 28. We say that $Z(s_1, \ldots, s_n)$ is an uniform Euler product if there exists a region $\Omega \subseteq \mathbf{C}^n$ and a polynomial $h \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ with integral coefficients (satisfying $h(\mathbf{0}) = 1$) such that for all $(s_1, \ldots, s_n) \in \Omega$ we have the equality :

$$Z(s_1, \ldots, s_n) = \prod_{p \text{ prime}} h\left(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}\right).$$

Given such uniform product $Z(s_1, \ldots, s_n)$, the question consists in determining the maximal domain $\mathbf{C}^n \supseteq \Omega' \supseteq \Omega$ such that there exists a meromorphic continuation of Z inside Ω'.

In particular we are interested in the possibility to have $\Omega' \subsetneq \mathbf{C}^n$; and if it is the case we want to describe precisely the boundary of meromorphy (or natural boundary) beyond which any meromorphic continuation is possible.

In the 1920s, E. Landau and A. Walfisz ([21]) proved that the function f for $\Re(s) > 1$ given by

$$f(s) = \sum_{p \text{ prime}} p^{-s}$$

admits a meromorphic extension to $\{s \in \mathbf{C} : \Re(s) > 0\}$ and that the line $\{s \in \mathbf{C} : \Re(s) = 0\}$ is a natural boundary of meromorphy.

A few years later, T. Estermann ([12]) characterized precisely the one variable Euler products $Z(s) = \prod_p h(p^{-s})$, determined by a polynomial $h(X) \in \mathbf{Z}[X], h(0) =$

1 which admit a meromorphic extension to whole $\mathbf{C}$. In addition, Estermann proved that if this property is not satisfied the product admits the imaginary axis as natural boundary of meromorphy :

Theorem. (Estermann)**.**
Let $h(X) = 1+\sum_{m=1}^{r} b_m X^m = \prod_{m=1}^{r}(1-\alpha_m X) \in \mathbf{Z}[X]$*. Let* $f(s) = \prod_p h(p^{-s})$ *which converges for* $\Re(s) > 1$*. Then :*

(i) $f(s)$ *can be meromorphically extended to* $\Re(s) > 0$*.*

(ii) *If* $|\alpha_m| = 1\ \forall m = 1, .., r$*, then* $f(s)$ *can be extended to* $\mathbf{C}$*. Otherwise,* $\Re(s) = 0$ *is a natural boundary for* f *(i.e. for each point* $s = it$ *on this vertical line,* f *cannot be extended as a meromorphic function on any neighbourhood* $\mathcal{B}(it)$*).*

Later, G. Dhalquist (see [8]) generalized this result where h is an analytic function with isolated singularities within the unit circle.

More than 30 years later, Kurokawa and Moroz (see [15], [16], [17], [18], [19], [24], [25]) extended this result by allowing polynomials h whose coefficients are integral linear combinations of complex numbers that depended upon the traces of a certain class of representations of a topological group.

Since the 80's, F.J. Grunewald, M. du Sautoy, D. Segal, G.C. Smith ([9], [10], [11], [13]) study a class of zeta function associated to a group or a ring :

Définition 29 ([9])**.** Given a group G, we call $\zeta_G(s)$ the zeta function associated to G the following function (defined formally) :

$$\zeta_G(s) = \sum_{H \leq G} \frac{1}{|G : H|^s}.$$

(the sum being done over all the subgroups H of finite index)

When the group G is finitely generated, the following quantity

$$a_n(G) = \text{Card}\,\{H : H \leq G \text{ et } |H : G| = n\}$$

is finite for all n and $\zeta_G(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(G)}{n^s}$ is a Dirichlet series.

In addition we check that when G is nilpotent $\zeta_G(s)$ is even an Euler product.

In some cases and notably when G is finitely generated, nilpotent of nilpotency class 2 and torsion-free (Grunewald, Segal, Smith), $\zeta_G(s)$ is an uniform Euler product which is not homogeneous; meaning that there exists a polynomial $W \in \mathbf{Z}[X, Y]$ such that

$$\zeta_G(s) = \prod_{p \text{ prime}} W(p^{-s}, p).$$

This led du Sautoy and Z. Rudnick to formulate the following conjecture :

Conjecture 3. Let $W(X,Y) \in \mathbf{Z}[X,Y]$ and let $Z(s) = \prod_{p \text{ prime}} W(p^{-s}, p)$.
Then $Z(s)$ admits a meromorphic continuation to $\mathbf{C}$ if and only if W is a finite product of cyclotomic factors : there exists m, cyclotomic polynomials $g_i(U)$ and integers b_i and c_i $(i = 1, \ldots, m)$ such that $W(X,Y) = \prod_{i=1}^{m} g_i\left(X^{b_i} Y^{c_i}\right)^{\pm 1}$.

du Sautoy proved this property in some cases or by adding some hypotheses concerning the non-trivial zeroes of the Riemann zeta function ; however the problem in whole generality remains open today.

In this thesis we will prove the following results :

1. We prove, under an hypothesis of regularity on the polynomial h (see Definition 32 below), **the exact multivariable generalization of the theorem of Estermann** by completely expliciting the natural boundary in the strong sense when h is not cyclotomic (in the sense of Definition 30) : we precisely show that **any meromorphic continuation is possible to a domain containing any point lying on this boundary**.
2. We introduce **the multivariable analogue of Conjecture 3** by considering the products of the form $(s_1, \ldots, s_n) \longmapsto \prod_p h\left(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c}\right)$ (where $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$) and **we determine the natural boundary of this class of functions when the polynomial h is not cyclotomic and verifies a condition of analytic regularity (see Definition 32)** (these products being meromorphic on $\mathbf{C}^n$ if h is cyclotomic).
3. We **answer to a problem asked by Kurokawa and Ochiai** ([20]) **concerning the maximal domain of meromorphy of the Igusa zeta function** $Z^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}]) = \sum_{m_1,\ldots,m_n \geq 1} \frac{\varphi(m_1 \cdots m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}}$ **by completely determining its natural boundary in the strong sense** (meaning that any continuation is possible beyond any point lying on this boundary).

6.2 Statements of main results.

For two positive integers r and n we define :

$$h\left(X_1, \ldots, X_n\right) = 1 + a_1 X_1^{\alpha_1^1} X_2^{\alpha_1^2} \cdots X_n^{\alpha_1^n} + \ldots + a_r X_1^{\alpha_r^1} X_2^{\alpha_r^2} \cdots X_n^{\alpha_r^n};$$

$$Z\left(\mathbf{s}\right) = \prod_p h\left(p^{-s_1}, p^{-s_2}, \ldots, p^{-s_n}\right) \text{ for } \mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbf{C}^n,$$

where a_j for $j = 1, \ldots, r$ are integers and α_j^ℓ for $j = 1, 2, \ldots, r$ and $l = 1, \ldots, n$ are nonnegative integers.

The following definition generalizes the notion of cyclotomy for multivariable polynomials.

Définition 30. We say that $h(X_1, \ldots, X_n)$ is cyclotomic if there exists a finite subset I of $\mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ such that :

$$h(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in I} \left(1 - X_1^{\lambda_1} \cdots X_n^{\lambda_n}\right)^{\gamma(\lambda)},$$

where $\gamma(\lambda) \in \mathbf{Z}$ for each $\lambda \in I$.

Thus when the polynomial $h \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ is cyclotomic, the associated Euler product

$$Z(s_1, \ldots, s_n) = \prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}) = \prod_{\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in I \text{ finite}} \zeta(\lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_n s_n)^{-\gamma(\lambda)};$$

and can be meromorphically continued to $\mathbf{C}^n$ as a finite product of zeta functions meromorphic on $\mathbf{C}^n$.

We check in fact that it is the only case where the product $Z(s_1, \ldots, s_n)$ meromorphically extends to $\mathbf{C}^n$. Indeed, if h is not cyclotomic, a boundary of meromorphy appears and generalizes the line $\Re(s) = 0$ natural boundary introduced by Estermann for the one variable products.

However, the geometry of this boundary is more complex.

Définition 31. Suppose that h is not cyclotomic and does not contain any cyclotomic factor.

For all $\delta \geq 0$ we put :

$$W(\delta) = \{\mathbf{s} \in \mathbf{C}^n : \langle \sigma, \alpha_j \rangle > \delta, \forall j \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

where $\alpha_j = \left(\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^n\right)$, $\sigma = (\Re(s_1), \ldots, \Re(s_n))$ and $\langle .,. \rangle$ designates the classical inner product.

We first observe that $Z(\mathbf{s})$ defines a holomorphic function of (s) in the domain $\langle \sigma, \alpha_j \rangle > 1, (j = 1, \ldots, r)$. In [2], G. Bhowmik, D. Essouabri and B. Lichtin showed that there is a meromorphic continuation of $Z(\mathbf{s})$ to $W(0)$.

Essentially their method consists in factorizing step by step the Euler product by zeta factors (which meromorphically extend to $\mathbf{C}^n$) in order to push the domain of absolute convergence of the product until $W(\delta)$ for all $\delta > 0$.

They proved in addition that the point $t = 0$ is an accumulation point of zeroes or poles of $t \longmapsto Z(t\theta)$ for almost all the directions θ; and consequently it is not possible to have a meromorphic continuation of $Z(\mathbf{s})$ until $W(\delta)$ for all $\delta < 0$ (see Theorem 27 page 190 in Chapter 7).

This is a first advance concerning the maximal domain of meromorphy of multivariable Euler products.

The main result of this thesis is to show that $\partial W(0)$ is exactly the natural boundary for $Z(\mathbf{s})$ when h is not cyclotomic.

Let us present succinctly the different chapters of this thesis.

Chapter 2.

This chapter is devoted to the proof of the main theorem of this thesis.

Before announcing the result, we will first introduce a definition.

Since $W(0) = \{\mathbf{s} \in \mathbf{C}^n : \Re(\langle \mathbf{s}, \alpha_j \rangle) \geq 0, \forall j = 1, \ldots, r\}$, then $\partial W(0)$ is a polyhedron whose faces are of the form :

$$\mathcal{F}(\alpha_e) = \{\mathbf{s} \in \overline{W(0)} : \Re(\langle s, \alpha_e \rangle) = 0\};$$

for a vector $\alpha_e \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$.

We will say by abuse of language that $\mathcal{F}(\alpha_e)$ is a face of polar vector α_e[1].

Now let $\mathcal{F}(\alpha_e)$ be a face of $\partial W(0)$ as above and consider in particular $\widehat{\alpha}_e \in \mathbf{N}^n, \widehat{\alpha}_e \in \mathbf{Q}\alpha_e$ the vector collinear with α_e whose nonzero components are relatively prime.

We also put :

$$\Lambda_e := \{j \in \{1, \ldots, r\} : \alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e\}.$$

It is clear that for all $j \in \Lambda_e$ there exists $q_j \in \mathbf{N}^*$ such that $\alpha_j = q_j \widehat{\alpha}_e$.

Then we define :

$$\begin{aligned} [h]_e(\mathbf{X}) &:= 1 + \sum_{\alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_j \mathbf{X}^{\alpha_j} \\ \widetilde{[h]}_e(T) &:= 1 + \sum_{\alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_j T^{q_j} \in \mathbf{Z}[T] \text{ satisfying } \widetilde{[h]}_e(\mathbf{X}^{\widehat{\alpha}_e}) = [h]_e(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Définition 32. We will say that the face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ is a nondegenerate face if the one variable polynomial $\widetilde{[h]}_e(T)$ has no multiple root.

Main Theorem.

Assume that h is not cyclotomic and that there exists a vector α_e ($e \in \{1, \ldots, r\}$) such that the face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ of $\partial W(0)$ is nondegenerate in the sense of Definition 32. Let $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e)$. Then $Z(\mathbf{s})$ admits no meromorphic continuation to any open ball $\mathcal{B}$ centered in $\mathbf{s}^0$.

[1] In reality α_e is a polar vector of $\mathcal{F}(\alpha_e) \cap \mathbf{R}^n = \{\mathbf{x} \in \overline{W(0)} \cap \mathbf{R}^n : \langle \mathbf{x}, \alpha_e \rangle = 0\}$.

Corollary.

If h is not cyclotomic and if all faces of $\partial W(0)$ are nondegenerate, then $\partial W(0)$ is the natural boundary of $Z(\mathbf{s})$ in the sense that for all $\mathbf{s}^0 \in \partial W(0)$, $Z(\mathbf{s})$ admits no meromorphic extension to any open ball $\mathcal{B}$ centered in $\mathbf{s}^0$.

Remarque 21. During the proof of the main theorem we introduce a new class called " generalized polynomials" that extends the class of polynomials of two variables and it has been necessary to develop a theory of Puiseux for this class.

However, the classical Puiseux theory for polynomials of two variables fits badly with the generalized polynomials because the fact that these are not regular functions creates problems of definition and convergence of the solutions.

This is the reason why we need an assumption of nondegeneracy of the faces of $\partial W(0)$ which is verified for almost all the polynomials h to overcome this difficulty.

Chapter 3.

During Chapter 3 we will precise the signification of the concept of "natural boundary" by examining the obstruction preventing a possible continuation beyond $\partial W(0)$.

Firstly we will show that in some cases an extension on the edge $\partial W(0)$ of $W(0)$ is possible.

In addition we will discuss about the eventuality to have an extension beyond $\partial W(0)$ of complex dimension (resp. real dimension) strictly less than n (resp. $2n$).

We will have to consider extensions on a real hypersurface (of real dimension $2n-1$) intersecting across $\partial W(0)$. We will use for this the theory of C-R functions (Cauchy-Riemann) on a real hypersurface which generalizes the notion of holomorphy on the open sets of $\mathbf{C}^n$ (see Definition 17). We will prove in particular that any real analytic C-R extension beyond $\partial W(0)$ defined on a real analytic hypersurface is possible :

Théorème 22. *Assume that h is not cyclotomic and that $\partial W(0)$ admits at least one face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ nondegenerate in the sense of Definition 32.*

Then $\mathcal{F}(\alpha_e) \subseteq \partial W(0)$ is a natural boundary of $Z(\boldsymbol{s})$ in the sense that there does not exist any meromorphic real analytic C-R extension defined on a real analytic hypersurface intersecting across $\mathcal{F}(\alpha_e)$.

Thus we obtain a result toward Conjecture 3 by putting $(p^{-s_1}, p^{-s_2}) = (p, p^{-s})$ and by applying this theorem to $Z(s_1, s_2)$ (see §3.3).

Chapter 4.

A first application (essentially taken from [2]) of the results obtained in the previous chapters will be given in this chapter.

We will consider a toric projective variety X embedded in the projective space by determining a set of d monomials defining equations of n variables.

The set of exponents of the monomials defining X determine a matrix $\mathbf{A}$ $d \times n$ with integral coefficients, whose rows $\mathbf{a}_j = (a_{j,1}, \dots, a_{j,n})$ each satisfy the property :

$$\sum_i a_{j,i} = 0.$$

The rational points of the variety are defined as follows :

$$X(\mathbf{A}) = \left\{ (x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{Q}) : \prod_{\{i: a_{j,i} \geq 0\}} x_i^{a_{j,i}} = \prod_{\{i: a_{j,i} < 0\}} x_i^{-a_{j,i}} \ \forall j \right\};$$

and its maximal torus $U(\mathbf{A})$ is :

$$U(\mathbf{A}) = \{ (x_1 : \dots : x_n) \in X(\mathbf{A}) : x_1 \cdots x_n \neq 0 \}.$$

Then we define a zeta function associated to the rational points of such variety by remarking firstly that to each of these rational points there corresponds a unique primitive lattice point.

So we construct a characteristic function $F_{\mathbf{A}} : \mathbf{N}^n \longrightarrow \{0,1\}$ which takes the value 1 if and only if $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbf{N}^n$ lies on $U(\mathbf{A})$ (i.e. $\prod_i m_i^{a_{j,i}} = 1 \ \forall j \leq d$) and $\gcd(m_1, \dots, m_n) = 1$.

In this way we define the Dirichlet series associated to this characteristic function :

$$Z_{\mathbf{A}}(\mathbf{s}) := \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbf{N}^n_{\geq 1}} \frac{F_{\mathbf{A}}(m_1, \dots, m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}} = \prod_p h_{\mathbf{A}}(p^{-s_1}, \dots, p^{-s_n}),$$

and we check in addition that this characteristic function is multiplicative and that the corresponding Dirichlet series can be rewrite as a multivariable uniform Euler product.

This class of zeta functions appear in counting problems of rational points on toric variety. Indeed, $F_{\mathbf{A}}$ permits to associate a Dirichlet series to a toric variety and consequently to give an asymptotic estimation when t tends to infinity of the counting function $N(U(\mathbf{A}); t) := \#\{\mathbf{x} \in U(\mathbf{A}) : \max_i (m_i(\mathbf{x})) \leq t\}$ by using tauberian theorems.

Some works in this direction ([5], [4], [2], [6],..) have provided precise estimations for a particular height of the number of rational points in particular cases by studying its height zeta function and by connecting it to this class of multivariable zeta function associated to the characteristic functions ([4], [6]).

Moreover (see §2 of [2]) it is possible to come down to a uniform Euler product of a multivariable *polynomial*; and consequently we can apply the previous results to completely describe the natural boundary when exists of this class of Dirichlet series associated to a toric projective variety.

Chapter 5.

We will provide in this chapter an other application by introducing a multivariable analogue of Conjecture 3.

Precisely, we will consider the maximal domain of meromorphy of an eulerian product of the following form :

$$Z(\mathbf{s}) := Z(s_1,\ldots,s_n) = \prod_{p \text{ prime}} h\left(p^{-s_1},\ldots,p^{-s_n},p^{-c}\right) := Z^{n+1}(s_1,\ldots,s_n,c),$$

where $n > 1$, $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ is a fixed non zero integer and $h(X_1,\ldots,X_{n+1}) \in \mathbf{Z}[X_1,\ldots,X_{n+1}]$.

We must underline the natural appearance of an additional hypothesis which permits to distinguish Conjecture 1 from its multivariable analogue since a priori this analogue contains the conjecture itself.

So we will assume that

$$\mathrm{Rank}\left(\alpha_j^{(n)}, j \in \{1,\ldots,r\}\right) > 1. \tag{6.1}$$

What has mainly motivated this study is the resolution of a problem which has been asked by N. Kurokawa and H. Ochiai.

If A is a ring, the multivariable global Igusa zeta function is defined as follows (for $n > 1$) :

$$Z^{\mathrm{ring}}(s_1,\ldots,s_n;A) := \sum_{m_1,\ldots,m_n\geq 1} \left|\mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}\left(A, \frac{\mathbf{Z}}{m_1\cdots m_n\mathbf{Z}}\right)\right| m_1^{-s_1}\cdots m_n^{-s_n}.$$

By the Chinese remainder theorem, we know that this zeta function expresses as an eulerian product :

$$Z^{\mathrm{ring}}(s_1,\ldots,s_n;A) = \prod_p Z_p^{\mathrm{ring}}(s_1,\ldots,s_n;A)$$

where

$$Z_p^{\text{ring}}(s_1,\ldots,s_n;A)=\sum_{k_1,\ldots,k_n\geq 0}\left|\text{Hom}_{\text{ring}}\left(A,\frac{\mathbf{Z}}{p^{k_1+\cdots+k_n}\mathbf{Z}}\right)\right|p^{-k_1s_1-\cdots-k_ns_n}.$$

We will prove two complementary results concerning the natural boundary of $\prod_p h(p^{-s_1},\ldots,p^{-s_n},p^{-c})$ which depend on the validation of an hypothesis that we will note (H) (see Theorem 23).

We will show that if this property (H) is satisfied we are able to determine the natural boundary in a strong sense (see Theorem 23) whereas if it is not verified, we still obtain the natural boundary but in a weaker sense (see Theorem 24) : we will see that there cannot exist any meromorphic continuation by translating the boundary on the left.

Théorème 23. *Soit $c\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$ and*

$$Z(\boldsymbol{s})=\prod_p h(p^{-s_1},\ldots,p^{-s_n},p^{-c}).$$

Assume that the polynomial $h(X_1,\ldots,X_n,X_{n+1})$ is not cyclotomic, does not contain any cyclotomic factors, admits at least one face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ nondegenerate in the sense of Definition 32, verifies (6.1) and satisfies in addition the following property (H) :

for all $j\in\{1,\ldots,r\}$ such that $\alpha_j\notin\mathbf{Q}\alpha_e$, $(\alpha_j^1,\ldots,\alpha_j^n)\notin\mathbf{Q}(\alpha_e^1,\ldots,\alpha_e^n)$.

Then $\mathcal{F}(\alpha_e)\bigcap\{s_{n+1}=c\}\subseteq\partial W(0)\bigcap\{s_{n+1}=c\}$ is a natural boundary (in the strong sense) of $Z(\boldsymbol{s})$: $Z(\boldsymbol{s})$ can be extended meromorphically to $W(0)\bigcap\{s_{n+1}=c\}$ and there does not exist any meromorphic continuation of $Z(\boldsymbol{s})$ to any domain containing an open ball $\mathcal{B}$ (of dimension n) centered in a point $\boldsymbol{s}^0$ such that $(\boldsymbol{s}^{0^{(n)}},c)\in\mathcal{F}(\alpha_e)$.

Théorème 24. *Let $c\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$ and*

$$Z(\boldsymbol{s})=\prod_p h(p^{-s_1},\ldots,p^{-s_n},p^{-c}).$$

Assume that the polynomial $h(X_1,\ldots,X_n,X_{n+1})$ is not cyclotomic, does not contain any cyclotomic factor, admits at least one face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ nondegenerate in the sense of Definition 32, verifies (6.1) but does not satisfy the property (H) of Theorem 23.

We suppose in addition the following property :

if $\alpha_{j_0}^{(n)} \notin \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$ *then the polynomials* $1 + \sum_{\alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_j \boldsymbol{X}^{\alpha_j}$ *and* $\sum_{j:\alpha_j - \alpha_{j_0} \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_j \boldsymbol{X}^{\alpha_j}$ *are relatively prime.*

Then $\partial W(0) \bigcap \{s_{n+1} = c\}$ *is a natural bounadary (in weak sense) of* $Z(\boldsymbol{s})$ *:* $Z(\boldsymbol{s})$ *does not admit any meromorphic continuation to* $W(\delta) \bigcap \{s_{n+1} = c\}$ *for all* $\delta < 0$*.*

We will answer in particular to a problem asked by Kurokawa and Ochiai (see [20]) concerning the maximal domain of meromorphy of the Igusa zeta function $Z^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}])$ which is defined as follows :

$$Z^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}]) = \sum_{m_1, \ldots, m_n \geq 1} \frac{\varphi(m_1 \cdots m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}},$$

where φ designates the classical Euler function.

Thus we will obtain the following result which completely explicits the natural boundary in the strong sense of $Z^{\text{ring}}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}])$:

Théorème 25. *The maximal domain of meromorphy* $\mathcal{M}$ *of Igusa's zeta function :*

$$Z^{ring}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}]) = \sum_{m_1, \ldots, m_n \geq 1} \frac{\varphi(m_1 \cdots m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}}$$

is given by :

$$\textit{For all } I \subseteq \{1, \ldots, n\}, \sum_{i \in I} \sigma_i > -1 + \# I.$$

In particular, if $s^0 \in \partial\mathcal{M}$*, then there does not exist any meromorphic continuation of* $Z^{ring}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}])$ *to a domain containing an open ball* $\mathcal{B}$ *of dimension* n *centered in* s^0*.*

Appendix

Two chapters will be given in the appendix and the second one is only given in french.

These chapters have an interest that allows them to be included in the thesis. However, they do not constitute the fundamental part where the main results of this thesis are proved.

Annexe A.

In this chapter, we will consider a particular case where alternative methods can be developped to prove the main theorem of Chapter 2. We will see that these methods illustrate the important role of the parts $[h]_e$ of h for $e \in \{1, \ldots, r\}$ (see Definition 10) in the accumulation of zeroes or poles in a neighbourhood of the boundary .

A such part $[h]_e$ of h can be considered as a one variable polynomial formed by keeping only certain terms of h (those whose the exponents are parallel to α_e). In this way, we obtain a local approximation in the neighbourhood of the hyperplane of the boundary perpendicular to α_e of the multivariable Euler product determined by h by an one variable Euler product determined by $[h]_e$.

Annexe B.

This chapter is independent of the previous ones.

We will extend Estermann's result to an other class of Euler products associated to an one variable pseudo-polynomial (i.e. to a function of the form $h(X) = 1 + \sum_{j=1}^{r} a_j X^{\alpha_j}$ where the $a_j \in \mathbf{Z}$ and the α_j are positive real numbers).

In particular, we will consider the case where the exponents $\alpha_j > 0$ are $\mathbf{Q}$-algebraically independent.

The main interest of this chapter is to emphasize again one of the fundamental and recurrent points of this thesis, meaning the fact to introduce genericity in the problem and to use arguments (like Baire Theorem) to reduce the starting problem to the generic case.

Here the genericity appears in the fact that the $\alpha_j > 0$ are $\mathbf{Q}$-algebraically independent and the main argument linked to this genericity comes from the fact that $\mathbf{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_r] \simeq \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_r]$ (see Lemma 22).

Finally, in the two last chapters we give an english translation of the most important results : Chapter 7 groups an english translation of Chapters 2, 3 and 4 and Chapter 8 is an english translation of Chapter 5.

Chapitre 7

English version of Chapters 2, 3 and 4.

This work extends Estermann's theorem to all Euler products $Z(\mathbf{s}) = h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n})$ determined by any polynomial $h(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ satisfying an hypothesis of analytic regularity when $n \geq 2$ and $h(\mathbf{0}) = 1$. Thus, we characterize precisely the natural boundary of $Z(\mathbf{s})$, that is, the boundary of a maximal domain on which it can be meromorphically continued.

7.1 Notations.

For two positive integers r and n we define :

$$h\left(X_1, \ldots, X_n\right) = 1 + a_1 X_1^{\alpha_1^1} X_2^{\alpha_1^2} \cdots X_n^{\alpha_1^n} + ... + a_r X_1^{\alpha_r^1} X_2^{\alpha_r^2} \cdots X_n^{\alpha_r^n};$$

$$Z\left(\mathbf{s}\right) = \prod_p h\left(p^{-s_1}, p^{-s_2}, \ldots, p^{-s_n}\right) \text{ for } \mathbf{s} = \left(s_1, \ldots, s_n\right) \in \mathbf{C}^n,$$

where a_j for $j = 1, \ldots, r$ are integers and α_j^ℓ for $j = 1, 2, \ldots, r$ and $l = 1, \ldots, n$ are nonnegative integers.

We also fix the following notations throughout the article.

We will write :

for all $\mathbf{m} \in \mathbf{N}^r$:

$$\|\mathbf{m}\| = \sum_{j=1}^r m_j;$$

for $\mathbf{s} \in \mathbf{C}^n, \mathbf{s} = \left(s_1, \ldots, s_n\right), \forall l \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\sigma_\ell = \Re\left(s_\ell\right); \ \gamma_\ell = \Im\left(s_\ell\right); \ \sigma = \Re\left(\mathbf{s}\right) = \left(\sigma_1, \ldots, \sigma_n\right); \ \gamma = \Im\left(\mathbf{s}\right) = \left(\gamma_1, \ldots, \gamma_n\right);$$

we also define for $\ell = 1, \ldots, n$ and $j = 1, \ldots, r$:

$$\alpha^{\ell} = (\alpha_1^{\ell}, \ldots, \alpha_r^{\ell}) \qquad \alpha_j = (\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^n).$$

For $j \in \{1, \ldots, r\}$ we will set :

$$\mathbf{X}^{\alpha_j} = X_1^{\alpha_j^1} X_2^{\alpha_j^2} \cdots X_n^{\alpha_j^n}.$$

Given $\mathbf{m} \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ and $l \in \{1, \ldots, n\}$, we define :

$$\langle \mathbf{m}, \alpha^{\ell} \rangle = \sum_{j=1}^{r} m_{\ell} \alpha_j^{\ell}$$

(respectively for $\mathbf{s} = (s_1, ...s_n)$ and $j \in \{1, \ldots, r\}$, $\langle \mathbf{s}, \alpha_j \rangle = \sum_{l=1}^{n} s_{\ell} \alpha_j^{\ell}$).

7.2 Presentation of results of this chapter.

We first begin with a basic definition.

Définition 33. We say that $h(X_1, \ldots, X_n)$ is cyclotomic if there exists a finite subset I of $\mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ such that :

$$h(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in I} \left(1 - X_1^{\lambda_1} \cdots X_n^{\lambda_n}\right)^{\gamma(\lambda)},$$

where $\gamma(\lambda) \in \mathbf{Z}$ for each $\lambda \in I$.

Remarque 22. If $h(X_1, \ldots, X_n)$ is cyclotomic, then if $\sigma_{\ell} > 1$ for all $l \in \{1, \ldots, n\}$, we have :

$$Z(\mathbf{s}) = \prod_{\lambda \in I} \zeta(\langle \lambda, \mathbf{s} \rangle)^{-\gamma(\lambda)},$$

where $\zeta(z)$ denotes the Riemann zeta function. As a result, it is clear that $Z(\mathbf{s})$ meromorphically extends to $\mathbf{C}^n$.

Moreover, if two polynomials $h(X_1, \ldots, X_n)$ and $g(X_1, \ldots, X_n)$ are such that :

$$g(X_1, \ldots, X_n) = h(X_1, \ldots, X_n) \prod_{\lambda \in I} \left(1 - \mathbf{X}^{\lambda}\right)^{\gamma(\lambda)}$$

with $I \subseteq \mathbf{N}^n$ finite and $\gamma(\lambda) \in \mathbf{Z}, \forall \lambda \in I$, then the maximal domains of meromorphic continuation of the euler products $\prod_p h(p^{-s_1}, p^{-s_2}, \ldots, p^{-s_n})$ and $\prod_p g(p^{-s_1}, p^{-s_2}, \ldots, p^{-s_n})$ coincide.

So from now on, we will suppose that h is not cyclotomic. In addition, without loss of generality, we assume that h does not contain any cyclotomic factor.

Définition 34. Suppose that h is not cyclotomic and does not contain any cyclotomic factor.

For all $\delta \geq 0$ we put :

$$W(\delta) = \{\mathbf{s} \in \mathbf{C}^n : \langle \sigma, \alpha_j \rangle > \delta, \forall j \in \{1, \dots, r\}\}.$$

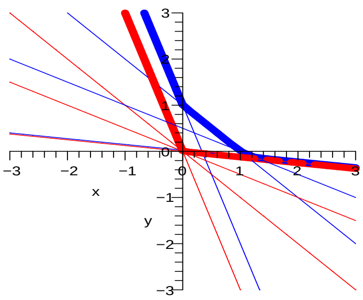

FIG. 7.1 – An example of representation of $W(1)$ and $W(0)$ for $n = 2$ (projection in the space of real parts).

Before announcing the result, we will first introduce a definition.

Since $W(0) = \{\mathbf{s} \in \mathbf{C}^n : \Re(\langle \mathbf{s}, \alpha_j \rangle) \geq 0, \forall j = 1, \dots, r\}$, then $\partial W(0)$ is a polyhedron whose faces are of the form :

$$\mathcal{F}(\alpha_e) = \{\mathbf{s} \in \overline{W(0)} : \Re(\langle s, \alpha_e \rangle) = 0\};$$

for a vector $\alpha_e \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$.

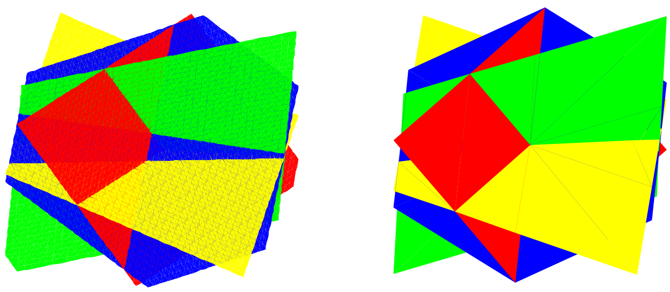

FIG. 7.2 – An example of representation of $W(1)$ and $W(0)$ for $n = 3$ (projection in the space of real parts).

We will say by abuse of language that $\mathcal{F}(\alpha_e)$ is a face of polar vector α_e.

Now let $\mathcal{F}(\alpha_e)$ be a face of $\partial W(0)$ as above and consider in particular $\widehat{\alpha}_e \in \mathbf{N}^n, \widehat{\alpha}_e \in \mathbf{Q}\alpha_e$ the vector collinear with α_e whose nonzero components are relatively prime.

We also put :

$$\Lambda_e := \{j \in \{1, \ldots, r\} : \alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e\}.$$

It is clear that for all $j \in \Lambda_e$ there exists $q_j \in \mathbf{N}^*$ such that $\alpha_j = q_j \widehat{\alpha}_e$.

On définit alors :

$$\begin{aligned} [h]_e(\mathbf{X}) &:= 1 + \sum_{\alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_j \mathbf{X}^{\alpha_j} \\ \widetilde{[h]_e}(T) &:= 1 + \sum_{\alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_j T^{q_j} \in \mathbf{Z}[T] \text{ verifying } \widetilde{[h]_e}(\mathbf{X}^{\widehat{\alpha}_e}) = [h]_e(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Définition 35. We will say that the face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ is a nondegenerate face if the one variable polynomial $\widetilde{[h]_e}(T)$ has no multiple root.

The case where h is a single variable polynomial was treated by Estermann (see [12]) in an article from 1928. He proved the following theorem :

Théorème 26 (Estermann)**.** *Let $h(X) = 1 + \sum_{m=1}^r b_m X^m = \prod_{m=1}^r (1 - \alpha_m X) \in \mathbf{Z}[X]$. Let $f(s) = \prod_p h(p^{-s})$, which converges for $\Re(s) > 1$. Then :*

(i) $f(s)$ can be meromorphically extended to $\Re(s) > 0$.

(ii) If $|\alpha_m| = 1\ \forall m = 1, .., r$, then $f(s)$ can be extended to $\mathbf{C}$. Otherwise, $\Re(s) = 0$ is a natural boundary for f (i.e. for each point $s = it$ on this vertical line, f cannot be extended as a meromorphic function on any neighborhood $\mathcal{B}(it)$).

Remarque 23. Notice that the hypothesis in part (ii) is equivalent to saying that $h(X)$ is cyclotomic in the sense of definition 33.

For a polynomial h in $n > 1$ variables, we first observe that $Z(\mathbf{s})$ defines a holomorphic function of (s) in the domain $\langle \sigma, \alpha_j \rangle > 1, (j = 1, \ldots, r)$. In [1], G. Bhowmik, D. Essouabri and B. Lichtin showed that there is a meromorphic continuation of $Z(\mathbf{s})$ to $W(0)$. They did so by proving the following result.

Théorème 27 (Bhowmik-Essouabri-Lichtin)**.** *For each $\delta > 0$, there exists a bounded Euler product $G_\delta(\boldsymbol{s})$, absolutely convergent on $W(\delta)$ such that :*

$$Z(\boldsymbol{s}) = \prod_{\substack{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r) \in \mathbf{N}^r \\ 1 \le \|\beta\| \le [\delta^{-1}]}} \zeta\left(\sum_{l=1}^n \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell\right)^{\gamma(\beta)} G_\delta(\boldsymbol{s}); \tag{7.1}$$

where $\{\gamma(\beta) : \beta \in \mathbf{N}^r\} \subset \mathbf{Z}$.

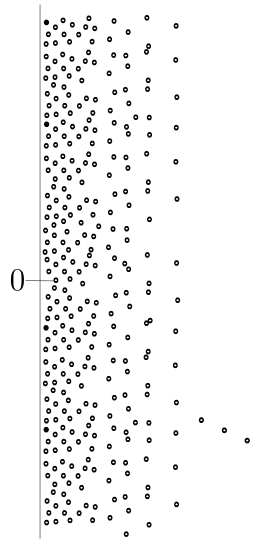

FIG. 7.3 – Natural boundary of $\prod_p h(p^{-s})$ (for h non cyclotomic) and accumulation of zeros or poles in the neighbourhood of each of its points.

In fact, their result is somewhat stronger. They also showed that $Z(\mathbf{s})$ does not admit a meromorphic continuation to $W(\delta)$ for any $\delta < 0$. This followed from the fact that $t = 0$ is an accumulation point of zeros or poles of the one complex variable function $t \longmapsto Z(t\theta)$ for almost direction θ.

The aim of this work is to prove that $\partial W(0)$ is a natural boundary for $Z(\mathbf{s})$, meaning that $\partial W(0)$ is the exact multivariable analog of the imaginary axis natural boundary which appear in Estermann's result.

Firstly notice that the geometry of these $W(\delta)$ $(\delta \geq 0)$ is more complex than in the one variable case; in particular we remark that the form of $W(\delta)$ changes when δ moves.

In addition, the exponents α_j of h don't have the same importance in the calculus of $W(\delta)$. Indeed consider the following example.

Exemple 3. Let

$$h(X_1, X_2, X_3) = 1 + \sum \left(1 - X_i^3\right) X_j^2 X_k - X_1^3 X_2^3 X_3^3;$$

the sum being done over the 6 permutations of $1, 2, 3$.

Then we can easily check that the $W(\delta)$ of h are completely determined starting from :

$$[h](X_1, X_2, X_3) = 1 + X_1 X_2^2 + X_1^2 X_2 + X_1 X_3^2 + X_1^2 X_3 + X_2 X_3^2 + X_2^2 X_3;$$

and the other monomials of h never interfere in the calculus of $W(\delta)$.

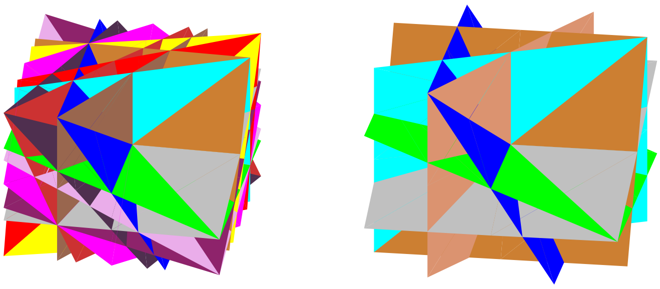

FIG. 7.4 – Representation of $W(\delta)$ $(\forall\delta \geq 0)$ calculated from $h(X_1, X_2, X_3)$ and from $[h](X_1, X_2, X_3)$ of Example 3 (projection in the space of real parts).

Our main result is as follows.

Main Theorem.

Assume that h is not cyclotomic and admits at least one face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ of $\partial W(0)$ nondegenerate in the sense of Definition 35.

Let $\mathcal{B}$ denote any open ball centered at any point $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e)$. Then $Z(\mathbf{s})$ cannot be extended as a meromorphic function to any domain that contains $\mathcal{B}$.

The proof of this result (see Theorem 6 in §3) extends arguments used in [12], [8], [2] and [11] and adds two new ideas. The first (see §2.2) is to write $h(X_1, \ldots, X_n)$ as an infinite product of cyclotomic polynomials. This allows us to manipulate the euler product $\prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n})$ beyond $W(1)$ with reasonable facility. In particular, this allows us to give a different proof of the fact that $Z(\mathbf{s})$ meromorphically extends up to $W(0)$.

The second new idea allows us to analyze with good precision how the zeroes $Z(\mathbf{s})$ can "accumulate" (i.e. when they cannot cancel out) inside any open ball of any point of $\partial W(0)$. In particular, we are able to do this provided that these zeroes also belong to a suitable line (determined by a real direction vector in $\mathbf{R}^n$). Such zeroes must be zeroes of appropriate factors of $Z(\mathbf{s})$, given the identity that is derived in §2.2. One might therefore think that rather precise information about the location of the zeroes of $\zeta(s)$ would be needed to carry out such an analysis. However, this is not really the case. Indeed, an important point is that we can reduce our attention to "good" but generic points of $\partial W(0)$ and for these points we do not need to assume any assumption about the zeroes of $\zeta(s)$ in order to carry out this analysis.

7.3 Rewriting $Z(\mathrm{s})$ as a product of zeta functions and meromorphic continuation.

7.3.1 An inversion formula for a multivariate arithmetical function.

The following result, which generalises the inversion formula for a single variable arithmetical function, will be used to prove a basic identity in §7.3.2.

Définition 36. If

$$g : \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbf{C},$$

$$f : \mathbf{N}^*(= \mathbf{N} - \{0\}) \longrightarrow \mathbf{C};$$

we define $f\tilde{*}g : \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbf{C}$ by setting :

$$\forall \beta \in \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \ f\tilde{*}g(\beta) = \sum_{\substack{\mathbf{b}\in\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\} \\ m\in\mathbf{N}^*, \\ m\mathbf{b}=\beta}} f(m)\, g(\mathbf{b}).$$

Lemme 24. *If*

$$g : \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbf{C},$$

$$f_1, f_2 : \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{C},$$

then :

$$f_1\tilde{*}(f_2\tilde{*}g) = (f_1 * f_2)\,\tilde{*}g,$$

where $*$ denotes the standard convolution product between one variable arithmetical functions.

Preuve. We have $\forall \beta \in \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\begin{aligned}
f_1\tilde{*}(f_2\tilde{*}g)(\beta) &= \textstyle\sum_{\substack{\mathbf{b}\in\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\}, \\ m\in\mathbf{N}^*, \\ m\mathbf{b}=\beta}} f_1(m)\,(f_2\tilde{*}g)(\mathbf{b}) \\
&= \textstyle\sum_{\substack{\mathbf{b}\in\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\}, \\ m\in\mathbf{N}^*, \\ m\mathbf{b}=\beta}} f_1(m) \sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\}, \\ d\in\mathbf{N}^*, \\ d\mathbf{e}=\mathbf{b}}} f_2(d)\, g(\mathbf{e}) \\
&= \textstyle\sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\}, \\ (m,d)\in(\mathbf{N}^*)^2, \\ md\mathbf{e}=\beta}} f_1(m)\, f_2(d)\, g(\mathbf{e}) \\
&= \textstyle\sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\}, \\ k\in\mathbf{N}^*, \\ k\mathbf{e}=\beta}} \left(\sum_{md=k} f_1(m)\, f_2(d)\right) g(\mathbf{e}) \\
&= \textstyle\sum_{\substack{\mathbf{e}\in\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\}, \\ k\in\mathbf{N}^*, \\ k\mathbf{e}=\beta}} (f_1 * f_2)(k)\, g(\mathbf{e}) \\
&= (f_1 * f_2)\,\tilde{*}g(\beta).
\end{aligned}$$

This completes the proof. □

Thus, if f is an invertible single variable arithmetic function (with respect to convolution), and if we know $f\tilde{*}g$, we are able to find g :

Corollaire 7.3.1. Let $f : \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{C}$ be an invertible arithmetic function with inverse f^{-1}. Then, for any $g : \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbf{C}$:

$$g(\beta) = f^{-1}\tilde{*}(f\tilde{*}g)(\beta) \qquad \forall \beta \in \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

7.3.2 Meromorphic continuation of $Z(\mathrm{s})$.

In this subsection we give a different proof (from that in [2]) that $Z(\mathbf{s})$ has a meromorphic continuation in $W(0)$. Our argument is based upon an expression for any polynomial h as in §7.1 as an infinite product of cyclotomic polynomials.

Consider the following quantity :

$$C := C(h) = \frac{1}{|a_1| + \cdots + |a_r|} \in]0,1].$$

It is clear that if each $|Y_i| < C$ $(i = 1, \ldots, r)$ then :

$$\left| \sum_{i=1}^{r} a_i Y_i \right| < 1; \tag{7.2}$$

and we verify that $C = C(h)$ is maximal among the C satisfying (7.2).

Lemme 25. *If each* $|Y_i| < C = C(h) = \frac{1}{|a_1|+\cdots+|a_r|}$, *then*

$$1 + a_1 Y_1 + \cdots + a_r Y_r = \prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\boldsymbol{0}\}} \left(1 - Y_1^{\beta_1} \ldots Y_r^{\beta_r}\right)^{\gamma(\beta)}, \tag{7.3}$$

where the right side converges absolutely and each

$$\gamma(\beta) = \sum_{\substack{\boldsymbol{b} \in \mathbf{N}^r \setminus \{\boldsymbol{0}\} \\ m \in \mathbf{N} \\ m\boldsymbol{b} = \beta}} \left((-1)^{\|\boldsymbol{b}\|} \frac{\mu(m)}{m} \frac{(\|\boldsymbol{b}\| - 1)!}{b_1! \ldots b_r!} a_1^{b_1} \ldots a_r^{b_r} \right) \in \mathbf{Z}$$

($\mu(.)$ denotes the Möbius function).

In addition,

$$|\gamma(\beta)| \ll C^{-\|\beta\|}$$

uniformly in $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\boldsymbol{0}\}$.

Remarque 24. The fact that $\gamma(\beta) \in \mathbf{Z}$ can be proved by recurrence on $\|\beta\|$ in the same way as in [12] p. 448 in the supplement of the appendix added January 14, 1928.

Indeed, firstly if $||\beta|| = 1$, we consider the $\beta(\ell) \in \mathbf{N}^r \backslash \{0, \dots, 0\}$ for $\ell \in \{1, \dots, r\}$ such that $\beta(\ell)_i = 0$ for $i \neq \ell$ and $\beta(\ell)_\ell = 1$.

And we verify that we have

$$\gamma(\beta(\ell)) = -a_\ell \in \mathbf{Z}. \tag{7.4}$$

To see it, it suffices to start from the identity :

$$\begin{aligned} 1 + a_1 Y_1 + \dots + a_r Y_r &= \prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \backslash \{0,\dots,0\}} \left(1 - \mathbf{Y}^\beta\right)^{\gamma(\beta)} \\ &= \prod_{\ell \in \{1,\dots,r\}} \left(1 - \mathbf{Y}^{\beta(\ell)}\right)^{\gamma(\beta(\ell))} \prod_{||\beta|| \geq 2} \left(1 - \mathbf{Y}^\beta\right)^{\gamma(\beta)} \end{aligned}$$

Thus :

$$(1 + a_1 Y_1 + \dots + a_r Y_r) \prod_{\ell \in \{1,\dots,r\}} (1 - Y_\ell)^{-\gamma(\beta(\ell))} = \prod_{||\beta|| \geq 2} \left(1 - \mathbf{Y}^\beta\right)^{\gamma(\beta)}. \tag{7.5}$$

After that we develop the left side of (7.5). We obtain :

$$\left(1 + \sum_{\ell=1}^{r} a_\ell Y_\ell\right) \left(1 + \sum_{\ell=1}^{r} \gamma(\beta(\ell)) Y_\ell + \sum_{\|\mathbf{b}\| \geq 2} a_{\mathbf{b}} \mathbf{Y}^{\mathbf{b}}\right). \tag{7.6}$$

So if we have the equality (7.5), the terms in Y_ℓ inside (7.6) must cancel out ; which gives (7.4).

Now assume that $\gamma(\beta) \in \mathbf{Z}$ for all $\|\beta\| \leq N$ ($N \geq 1$), and prove that $\gamma(\beta) \in \mathbf{Z}$ for all $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ such that $\|\beta\| = N + 1$.

We use again the same argument. We write :

$$(1 + a_1 Y_1 + \dots + a_r Y_r) \prod_{||\beta|| \leq N} \left(1 - \mathbf{Y}^\beta\right)^{-\gamma(\beta)} = \prod_{||\beta|| \geq N+1} \left(1 - \mathbf{Y}^\beta\right)^{\gamma(\beta)}. \tag{7.7}$$

The right side of (7.7) can be written as :

$$\prod_{||\beta|| \geq N+1} \left(1 - \mathbf{Y}^\beta\right)^{\gamma(\beta)} = 1 - \sum_{||\beta|| = N+1} \gamma(\beta) \mathbf{Y}^\beta + \sum_{||\beta|| > N+1} a_\beta \mathbf{Y}^\beta.$$

Moreover, by the recurrence hypothesis, we know that the left side of (7.7) is an entire series with integral coefficients.

By identifying inside (7.7), we obtain that $\gamma(\beta) \in \mathbf{Z}$ for all β such that $||\beta|| = N + 1$; and hence that $\gamma(\beta) \in \mathbf{Z}$ for all $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Preuve (Lemma 25). We put

$$\gamma(\beta) = \sum_{\substack{\mathbf{b}\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\} \\ m\in\mathbf{N} \\ m\mathbf{b}=\beta}} \left((-1)^{\|\mathbf{b}\|} \frac{\mu(m)}{m} \frac{(\|\mathbf{b}\|-1)!}{b_1!...b_r!} a_1^{b_1}...a_r^{b_r} \right).$$

Give an estimate of $\gamma(\beta)$. We have :

$$\begin{aligned}
|\gamma(\beta)| &\leq \sum_{\substack{\mathbf{b}\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\} \\ m\in\mathbf{N} \\ m\mathbf{b}=\beta}} \frac{1}{m} \frac{(\|\mathbf{b}\|-1)!}{b_1!\cdots,b_r!} \prod_{j=1}^r |a_j|^{b_j} \\
&\leq \frac{1}{\|\beta\|} \sum_{\substack{\mathbf{b}\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\} \\ m\in\mathbf{N} \\ m\mathbf{b}=\beta}} \frac{\|\mathbf{b}\|!}{b_1!\cdots,b_r!} \prod_{j=1}^r |a_j|^{b_j} \\
&\leq \frac{1}{\|\beta\|} \sum_{m|\|\beta\|} \sum_{\substack{\mathbf{b}\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\} \\ \|\mathbf{b}\|=\frac{\|\beta\|}{m}}} \frac{\|\mathbf{b}\|!}{b_1!\cdots,b_r!} \prod_{j=1}^r |a_j|^{b_j} \\
&\leq \frac{1}{\|\beta\|} \sum_{m|\|\beta\|} (|a_1|+\cdots+|a_r|)^{\frac{\|\beta\|}{m}} \\
&\leq \frac{\tau(\|\beta\|)}{\|\beta\|} (|a_1|+\cdots+|a_r|)^{\|\beta\|} \text{ where } \tau(\|\beta\|) \text{ is the number of divisors of } \|\beta\| \\
&\leq \frac{\tau(\|\beta\|)}{\|\beta\|} C^{-\|\beta\|} \\
&\ll C^{-\|\beta\|}
\end{aligned}$$

uniformly in $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Now put

$$G(\mathbf{Y}) := \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} \left(1 - Y_1^{\beta_1}\cdots Y_r^{\beta_r}\right)^{\gamma(\beta)}.$$

Verify that $G(\mathbf{Y})$ is an holomorphic function in $\{\mathbf{Y}\in\mathbf{C}^r : \max_i|Y_i| < C\}$.

So let $0 < C_1 < C$ and let us prove the convergence of G for $\max_i|Y_i| < C_1$.

We have for $|Y_i| < C_1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} |\gamma(\beta)||Y^\beta| &\leq \sum_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} C^{-\|\beta\|} C_1^{\|\beta\|} \\
&= \sum_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} \left(\frac{C_1}{C}\right)^{\|\beta\|} \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{C_1}{C}\right)^k\right)^r = \frac{1}{\left(1-\frac{C_1}{C}\right)^r} < +\infty.
\end{aligned}$$

Hence $\mathbf{Y} \longmapsto G(\mathbf{Y})$ converges absolutely and defines an holomoephic function in $\mathcal{D} := \{\mathbf{Y} \in \mathbf{C}^r : \max_i |Y_i| < C\}$; moreover, for all $Y \in \mathbf{D}$ we have :

$$\begin{aligned} \log(G(Y)) &= \sum_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \gamma(\beta) \log(1 - \mathbf{Y}^\beta) \\ &= -\sum_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \gamma(\beta) \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} \mathbf{Y}^{m\beta}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

And since (7.8) converges absolutely for $\mathbf{Y} \in \mathcal{D}$, we have :

$$\begin{aligned} \log(G(\mathbf{Y})) &= -\sum_{\mathbf{b} \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \left(\sum_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}, m \in \mathbf{N}, m\beta = \mathbf{b}} \frac{\gamma(\beta)}{m} \right) \mathbf{Y}^{\mathbf{b}} \\ &= -\sum_{\mathbf{b} \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{1}{\|\mathbf{b}\|} \left(\sum_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}, m \in \mathbf{N}, m\beta = \mathbf{b}} \|\beta\| \gamma(\beta) \right) \mathbf{Y}^{\mathbf{b}}. \end{aligned} \tag{7.9}$$

But we have :

$$-\|\beta\| \gamma(\beta) = \sum_{m \in \mathbf{N}, \mathbf{b} \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}, m\mathbf{b} = \beta} \mu(m) (-1)^{\|\mathbf{b}\|-1} \frac{\|\mathbf{b}\|!}{b_1! \cdots b_r!} a_1^{b_1} \cdots a_r^{b_r};$$

And by definition of §7.3.1, we have :

$$-\|\beta\| \gamma(\beta) = \mu \tilde{*} g(\beta),$$

where μ denotes the Möbius function, and the function g is defined by $g(\beta) = (-1)^{\|\beta\|-1} \frac{\|\beta\|!}{\beta_1! \cdots \beta_r!} a_1^{\beta_1} \cdots a_r^{\beta_r}$ for $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Since the function $\mathbf{1}$ being 1 everywhere is the inverse of the function μ we obtain :

$$\sum_{\exists m \in \mathbf{N}, \beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}, m\beta = \mathbf{b}} -\|\beta\| \gamma(\beta) = (-1)^{\|\mathbf{b}\|-1} \frac{\|\mathbf{b}\|!}{b_1! \cdots b_r!} a_1^{b_1} \cdots a_r^{b_r}. \tag{7.10}$$

So the identity (7.9) provides :

$$\begin{aligned} \log(G(\mathbf{Y})) &= \sum_{\mathbf{b} \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{1}{\|\mathbf{b}\|} (-1)^{\|\mathbf{b}\|} \frac{\|\mathbf{b}\|!}{b_1! \cdots b_r!} \mathbf{a}^{\mathbf{b}} \mathbf{Y}^{\mathbf{b}} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\sum_{\|\mathbf{b}\| = k} \frac{k!}{b_1! \cdots b_r!} \prod_{j=1}^{r} (a_j Y_j)^{b_j} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} (a_1 Y_1 + \cdots + a_r Y_r)^k \\ &= \log(1 + a_1 Y_1 + \cdots + a_r Y_r); \end{aligned}$$

which completes the proof of this lemma. □

We fix a polynomial h as in §7.1 and consider the quantity :

$$C := C(h) = \frac{1}{|a_1| + \cdots + |a_r|}. \tag{7.11}$$

Corollaire 7.3.2. If each $|\mathbf{X}^{\alpha_j}| < C$ for $j \in \{1, \ldots, r\}$, then :

$$\begin{aligned} 1 + a_1\mathbf{X}^{\alpha_1} + \cdots + a_r\mathbf{X}^{\alpha_r} &= \prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \left(1 - \prod_{l=1}^{n} X_\ell^{\langle \beta, \alpha^\ell \rangle}\right)^{\gamma(\beta)} \\ &= \prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \left(1 - \mathbf{X}^{\left(\sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j\right)}\right)^{\gamma(\beta)}. \end{aligned}$$

Théorème 28. *$Z(\boldsymbol{s})$ is meromorphic on $W(0)$.*

Moreover, if we write for all $\delta > 0$ $M_\delta = \left[C^{-\frac{1}{\delta}}\right] + 1$ ($M_\delta \in \mathbf{N}$), there exists A_{M_δ} meromorphic on $W(\delta)$ with possible zeros or poles in the set :

$$\Phi_\delta = \left\{ \boldsymbol{s} \in W(\delta) \mid \exists \beta \in \mathbf{N}^r, \sum_{l=1}^{n} \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell = \rho, \ \rho \textit{ zero or pole of } \zeta(s) \right\}.$$

such that this relation holds on $W(\delta)$:

$$Z(\boldsymbol{s}) = \prod_{p \le M_\delta} h\left(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}\right) A_{M_\delta}(\boldsymbol{s}).$$

Preuve. We show that $Z(\mathbf{s})$ is meromorphic on $W(\delta)$ for all $\delta > 0$.

We know that if each $|\mathbf{X}^{\alpha_j}| < C$ then

$$h(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \left(1 - \mathbf{X}^{\left(\sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j\right)}\right)^{\gamma(\beta)}$$

where the right side converges absolutely.

We know according to the previous lemma that :

$$|\gamma(\beta)| = O\left(C^{-\|\beta\|}\right).$$

Thus, for $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ and $\mathbf{s} \in W(\delta)$ we have :

$$\begin{aligned}
\sum_{p>M_\delta}\left|\gamma(\beta)\, p^{-\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell}\right| &\leq |\gamma(\beta)|\sum_{p>M_\delta} p^{-\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\sigma_\ell}\\
&= |\gamma(\beta)|\sum_{p>M_\delta} p^{-\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\alpha_j,\sigma\rangle}\\
&\leq |\gamma(\beta)|\int_{M_\delta}^{+\infty} x^{-\|\beta\|\delta}dx\\
&= O\left(|\gamma(\beta)|\,M_\delta^{-\|\beta\|\delta+1}\right)\\
&= O\left(C^{-\|\beta\|}M_\delta^{-\|\beta\|\delta+1}\right).
\end{aligned}$$

Since $|x|<1$ implies :

$$\sum_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} x^{\|\beta\|} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^r - 1 < +\infty,$$

and since $M_\delta > C^{-\frac{1}{\delta}}$, we see that ϵ can be supposed small enough so that $M_\delta > (C-2\epsilon)^{-\frac{1}{\delta}}$. We then have :

$$\sum_{p>M_\delta}\sum_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\left|\frac{\gamma(\beta)}{p^{\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell}}\right| < +\infty;$$

and thus according to Fubini's theorem applied with the counting measure we obtain :

$$\prod_{p>M_\delta}\prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\left(1-p^{-\left(\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)}\right)^{\gamma(\beta)} = \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\prod_{p>M_\delta}\left(1-p^{-\left(\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)}\right)^{\gamma(\beta)}.$$

We then have, initially for $\sigma_k > -\frac{\log(C)}{\log(2)}$, $(k=1,\ldots,n)$ (i.e. $|p^{-s_k}|<C$ for each k), and subsequently by analytic continuation to $W(\delta)$, the following equality :

$$\prod_{p>M_\delta} h\left(p^{-s_1},\ldots,p^{-s_n}\right) = \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)\right]^{-\gamma(\beta)},$$

where

$$\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right) = \zeta\left(\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)\prod_{p\leq M_\delta}\left(1-p^{-\left(\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)}\right). \tag{7.12}$$

We then notice that for all z with $\Re(z)>0$, $\zeta(z)$ and $\zeta_{M_\delta}(z)$ have exactly the same zeros with the same multiplicities since $\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\sigma_\ell = \sum_j\beta_j\langle\alpha_j,\sigma\rangle > \delta$ when $\mathbf{s}\in W(\delta)$ and $\left(1-p^{-\Re(z)}\right)$ does not vanish when $p\leq M_\delta$ and $\Re(z)>\delta$.

Set :

$$A_{M_\delta}(\mathbf{s}) = \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} \left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)\right]^{-\gamma(\beta)}.$$

The zeroes or poles of A_{M_δ} must belong to Φ_δ. Moreover, A_{M_δ} is meromorphic on $W(\delta)$.

Indeed, we write :

$$A_{M_\delta}(\mathbf{s}) = A_{1,M_\delta}(\mathbf{s})\, A_{2,M_\delta}(\mathbf{s}),$$

with

$$A_{1,M_\delta}(\mathbf{s}) = \prod_{\|\beta\|\le[\delta^{-1}]} \left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)\right]^{-\gamma(\beta)}$$

and

$$A_{2,M_\delta}(\mathbf{s}) = \prod_{\|\beta\|>[\delta^{-1}]} \left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)\right]^{-\gamma(\beta)}.$$

A_{1,M_δ} is clearly meromorphic on $\mathbf{C}^n$ since it equals a finite product of meromorphic functions.

For A_{2,M_δ}, we have for $\|\beta\|\ge[\delta^{-1}]+1$,

$$\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\sigma_\ell \ge \|\beta\|\delta > 1;$$

Hence

$$\left|\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)-1\right| \le \sum_{k=M_\delta+1}^{+\infty} k^{-\|\beta\|\delta} < \int_{M_\delta}^{+\infty} x^{-\|\beta\|\delta}dx = \frac{1}{\|\beta\|\delta-1}\frac{1}{M_\delta^{\|\beta\|\delta-1}}.$$

Therefore,

$$\begin{aligned}&\sum_{\|\beta\|\ge[\delta^{-1}]+1} |\gamma(\beta)| \left|\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell\right)-1\right| \\ &\le \sum_{\|\beta\|\ge[\delta^{-1}]+1} \left(\frac{C^{-1}}{(M_\delta)^\delta}\right)^{\|\beta\|} \frac{M_\delta}{\|\beta\|\delta-1} < +\infty;\end{aligned}$$

which proves the meromorphy of A_{2,M_δ}, and so of A_{M_δ} on $W(\delta)$.

Finally, since

$$Z(\mathbf{s}) = A_{M_\delta}(\mathbf{s}) \prod_{p\le M_\delta} h\left(p^{-s_1},\ldots,p^{-s_n}\right);$$

it follows that $Z(\mathbf{s})$ is meromorphic on $W(\delta)$.

This completes the proof. $\square$

7.4 Natural boundary of $Z(\mathrm{s})$.

Previously we have proved that $Z(\mathbf{s})$ meromorphically extend to $W(0)$. The aim of this section is to check that $\partial W(0)$ is a natural boundary of $Z(\mathbf{s})$ when h is not cyclotomic.

The recurrent newness of this work comes from the fact that if there exists a meromorphic continuation beyond a point of $\partial W(0)$, then this continuation is done in an open ball beyond $\partial W(0)$; consequently it suffices to consider a generic point $\mathbf{s}^0$ lying on $\partial W(0)$ (here a generic set means that the interior of its complementary set is empty) and to prove the existence of an accumulation of zeroes or poles in a suitable direction $\theta \in \mathbf{Q}^n$.

In whole the following we assume that h **is not cyclotomic and does not contain any cyclotomic factor.**

In this section, we will prove the following result :

Théorème 29. *If $\mathcal{F}(\alpha_e)$ is a nondegenerate face of $\partial W\ (0)$ in the sense of Definition 35 then $Z\ (\boldsymbol{s})$ cannot be meromorphically continued into any open ball $\mathcal{B}$ centered at any point $\boldsymbol{s}^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e) \subseteq \partial W\ (0)$.*

So let $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e)$ verifying $\langle \sigma^0, \alpha_e \rangle = 0$.

Consider an open ball $\mathcal{B}(\mathbf{s}^0) = \mathcal{B}$ of radius arbitrarily small around the point $\mathbf{s}^0$.

Moving $\mathbf{s}^0 \in \partial W(0) \cap \mathcal{B}$ if necessary, we can assume that σ^0 verify the following genericity conditions given a vector $\mathbf{w} \in \mathbf{Q}^n$: there exists $e \in \{1, \ldots, r\}$ such that

$$\langle \sigma^0, \mathbf{w} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{w} \in \mathbf{Q}\alpha_e. \tag{7.13}$$

In particular we have :

if $\beta, \beta' \in \mathbf{N}^r \backslash \{\mathbf{0}\}$ are such that $\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle = \sum_{j=1}^r \beta'_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle$, then $\sum_{j=1}^r \beta'_j \alpha_j \in \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j + \mathbf{Q}\alpha_e$.

Définition 37. Given $e \in \{1, \ldots, r\}$ we denote by $\langle \alpha_e \rangle$ the line connecting $\mathbf{0}$ and integer point α_e in $\mathbf{R}^n$, and then define the e-th main part of h

$$[h]_e(\mathbf{X}) = 1 + \sum_{\alpha_j \in \langle \alpha_e \rangle} a_j \mathbf{X}^{\alpha_j}.$$

Définition 38. Given $e \in \{1, \ldots, r\}$ we set

$$\begin{aligned} \Lambda_e &= \{ j \in \{1, \ldots, r\} : \alpha_j \in \langle \alpha_e \rangle \} \\ B_e &= \{ \beta \in \mathbf{N}^r : \beta_j = 0 \quad \text{if} \quad j \notin \Lambda_e \}. \end{aligned}$$

Remember that thanks to §7.3.2, we have given $\delta > 0$ the following expression of $Z(\mathbf{s})$ for $\mathbf{s} \in W(\delta)$:

$$Z\,(\mathbf{s}) = \prod_{p \leq M_\delta} h\left(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}\right) A_{M_\delta}\,(\mathbf{s}) \ \ (\mathbf{s} \in W(\delta));$$

where $M_\delta = \left[C^{-\frac{1}{\delta}}\right] + 1$ and $C := C(h) = \frac{1}{|a_1|+\cdots+|a_r|}$.

Then consider $Z|_{L(\mathbf{s}^0,\theta)}$ the restriction of Z to a complex line $L = L(\mathbf{s}^0, \theta)$ of direction $\theta \in \mathbf{Q}^n_{>0}$ passing through $\mathbf{s}^0$ that we parametrize as follows :

$$t \longmapsto Z(\mathbf{s}^0 + t\theta).$$

The aim is to prove the existence of an accumulation of zeroes of $Z|_L$ in any rectangle $\Xi_{u,\eta}$ depending on two parameters $(u, \eta > 0)$:

$$\Xi_{u,\eta} : \begin{array}{l} 0 < \Re(t) < 1 \\ 0 < u < \Im(t) < u + \eta. \end{array}$$

To be able to use the writing of Theorem 28 for $Z|_{L(s^0,\theta)}$, it suffices to impose the following conditions on $\theta \in \mathbf{Q}^n$:

$$\langle \theta, \alpha_j \rangle \geq 1 \text{ for all } j \in \{1, \ldots, r\}. \tag{7.14}$$

It is then simple to verify that when θ satisfies (7.14) and $\Re(t) \geq \delta > 0$ then $\mathbf{s}^0 + t\theta \in W(\delta)$. Indeed, we observe :

$\forall j \in \{1, \ldots, r\},\ \langle \sigma^0 + \Re(t)\,\theta, \alpha_j \rangle \geq \Re(t) \geq \delta.$

As a result, we are able to apply Theorem 28 to give a product expansion for $Z(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ whenever $\Re(t) \geq \delta$ for any $\delta > 0$.

The proof of Theorem 29 will be done in two steps.

In a first time, we will show an accumulation of zeroes coming from the factors $t \longmapsto \prod_{p \leq M_\delta} h\left(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}\right)$.

The delicate point will consist in showing the existence of such zeroes with positive real part, meaning that on the right of $\partial W(0)$. And this is possible by controlling the dependance on θ of these zeroes (by expressing them as Puiseux series) and by choosing this θ suitably.

Secondly, it will be necessary to ensure that these zeroes are not cancelled by possible poles coming from ζ-factors of $A_{M_\delta}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$. For this remark that the zeroes or poles of $A_{M_\delta}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ can be expressed as follows :

$$t(\beta, \rho) = \frac{\rho - \sum_{j=1}^r \beta_j \langle \mathbf{s}^0, \alpha_j \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle};$$

where $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ and ρ designates the pole 1 or a non-trivial zero of the Riemann zeta function.

After the idea will consist in making profit this time of the freedom that we have in the choice of $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{B} \cap \partial W(0)$ so that we have for all ρ and for all $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$h\left(p^{-s_1^0 - t(\beta,\rho)\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t(\beta,\rho)\theta_n}\right) \neq 0.$$

Let us write now a lemma which will be useful many times later. It asserts that the zeroes of an holomorphic function nonzero on an open set of $\mathbf{C}^n$ form locally a finite union of hypersurfaces of dimension at most $n-1$ and are consequently of empty interior inside $\mathbf{C}^n$.

We can remark that this lemma is a consequence of the Weierstrass preparation theorem which we can find in [1].

Lemme 26. *Let*

$$f : \begin{array}{ccc} U \subseteq \mathbf{C}^n & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

be an holomorphic function nonzero on U.

The set $f^{-1}(0)$ is locally a finite union of hypersurfaces of dimension at most $n-1$; in particular $f^{-1}(0)$ is of empty interior inside $\mathbf{C}^n$.

Preuve. Consider a neighbourhood of a zero $(z_1, \ldots, z_n) \in U$ of $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Inside such neighbourhood, f can be written, being an analytic function, as an entire series :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{w \in \mathbf{N}^n} c_w (x_1 - z_1)^{w_1} \cdots (x_n - z_n)^{w_n}.$$

If one of the following conditions for $\ell \in \{1, \ldots, n\}$:

$$x_\ell \longmapsto f(z_1, \ldots, z_{\ell-1}, x_\ell, z_{\ell+1}, \ldots, z_n) \not\equiv 0, \tag{7.15}$$

is satisfied, we can apply the Weierstrass preparation theorem which provides in a neighbourhood of $(z_1, \ldots, z_n)$:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = E(x_1, \ldots, x_n) P(x_1, \ldots, x_n);$$

where

$$\begin{aligned} P(x_1, \ldots, x_n) \;=\; & x_\ell^d + x_\ell^{d-1} h_{d-1}(x_1, \ldots, x_{\ell-1}, \widehat{x_\ell}, x_{\ell+1}, \ldots, x_n) + \cdots + \\ & x_\ell h_1(x_1, \ldots, x_{\ell-1}, \widehat{x_\ell}, x_{\ell+1}, \ldots, x_n) + h_0(x_1, \ldots, x_{\ell-1}, \widehat{x_\ell}, x_{\ell+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

is a polynomial in x_ℓ whose coefficients $h_k(x_1, \ldots, x_{\ell-1}, \widehat{x_\ell}, x_{\ell+1}, \ldots, x_n)$ are analytic in $x_1, \ldots, x_{\ell-1}, x_{\ell+1}, \ldots, x_n$ and where E don't vanishes.

We see that the zeroes of $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ are given by a finite union of at most d hypersurfaces of dimension at most $n-1$; they are consequently of empty interior inside $\mathbf{C}^n$.

Now if any of the conditions (7.15) is not satisfied, given $\mu \in (\mathbf{R}^*)^n$ it suffices to make the affine change of variable :

$$\begin{cases} x_1 - z_1 = \mu_1 u_1, \\ x_2 - z_2 = \mu_2 u_1 + u_2, \\ x_3 - z_3 = \mu_3 u_1 + u_3, \\ \cdots \\ x_n - z_n = \mu_n u_1 + u_n; \end{cases}$$

in such a way that :

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ &= \sum_{w \in \mathbf{N}^n} c_w (\mu_1 u_1)^{w_1} (\mu_2 u_1 + u_2)^{w_2} \cdots (\mu_n u_1 + u_n)^{w_n}. \end{aligned}$$

Thus :

$$f(1, 0, \ldots, 0) = \sum_{w \in \mathbf{N}^n} c_w \mu_1^{w_1} \mu_2^{w_2} \cdots \mu_n^{w_n}.$$

hence there is at least one $\mu \in (\mathbf{R}^*)^n$ such that the change of variable as above gives $f(u_1, 0, \ldots, 0) \not\equiv 0$. Consequently one of the conditions (7.15) is well satisfied, which completes the proof of this lemma.

$\square$

Let's start by describing the zeroes of $t \longmapsto h\left(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}\right)$ and for this we want to use the theory of Puiseux series.

Definition of generalized polynomials. We will need in the following to enlarge in a certain sense the class of classical polynomials of two variables.

Définition 39. We will say that $W(X, Y)$ is a generalized polynomial if for all $X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ and $Y \in \mathbf{C}$ deprived of an half-line we have :

$$W(X, Y) = 1 + \sum_{j=1}^{r} c_j X^{\nu_j} Y^{\mu_j} \ (c_j \in \mathbf{C});$$

where for all $j \in \{1, \ldots, r\}$, $\nu_j \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ and $\mu_j \in \mathbf{Q}_{>0}$.

Notice that contrary to the classical polynomials, the generalized polynomials $W(X, Y)$ are a priori defined only for $X, Y \in \mathbf{C}$ deprived of an half-line since it is necessary to be able to define a logarithm to define them.

Thus when we will speak about a generalized polynomial $W(X, Y)$, it will be understood throughout the remainder that we consider it for $X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ and for $Y \in \mathbf{C}$ deprived of an half-line.

As for polynomials, by using exactly the same reasoning as that described in Lemma 25, we have the following cyclotomic expansion for a generalized polynomial $W(X,Y) = 1 + \sum_{j=1}^{r} c_j X^{\nu_j} Y^{\mu_j}$:

Proposition 8. *Let* $C_W := min\left(1, (\sum_{j=1}^{r} |c_j|)^{-1}\right)$.
if each $|X^{\nu_j} Y^{\mu_j}| < C_W$ $(X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-, Y \in \mathbf{C} \setminus e^{i\mathfrak{b}}\mathbf{R}_+)$ *for* $j \in \{1,\ldots,r\}$, *then :*

$$1 + c_1 X^{\nu_1} Y^{\mu_1} + \cdots + c_r X^{\nu_r} Y^{\mu_r} \quad = \quad \prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\boldsymbol{0}\}} \left(1 - X^{\langle \beta, \nu \rangle} Y^{\langle \beta, \mu \rangle}\right)^{\gamma(\beta)};$$

where

$$\gamma(\beta) = \sum_{\substack{\boldsymbol{b} \in \mathbf{N}^r \setminus \{\boldsymbol{0}\} \\ m \in \mathbf{N} \\ m\boldsymbol{b} = \beta}} \left((-1)^{\|\boldsymbol{b}\|} \frac{\mu(m)}{m} \frac{(\|\boldsymbol{b}\| - 1)!}{b_1! \ldots b_r!} c_1^{b_1} \ldots c_r^{b_r} \right) \in \mathbf{C}.$$

Let p a prime number.

We consider in particular the generalized polynomial :

$$W_{\mathbf{s}^0,\theta}^{p}(X,Y) = 1 + a_1 p^{-i\langle \gamma^0, \alpha_1 \rangle} X^{\langle \sigma^0, \alpha_1 \rangle} Y^{\langle \theta, \alpha_1 \rangle} + \cdots + a_r p^{-i\langle \gamma^0, \alpha_r \rangle} X^{\langle \sigma^0, \alpha_r \rangle} Y^{\langle \theta, \alpha_r \rangle}.$$

Since $\mathbf{s}^0 = \sigma^0 + i\gamma^0$, we have :

$$W_{\mathbf{s}^0,\theta}^{p}\left(p^{-1}, p^{-t}\right) = h\left(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}\right).$$

Notice that for a fixed p, $W_{\mathbf{s}^0,\theta}^{p}\left(p^{-1}, p^{-t}\right)$ is well defined for almost all $t \in \Xi_{u,\eta}$ (i.e. for all $t \in \Xi_{u,\eta}$ except at most a finite number).

Indeed, $p^{-1} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ and if we choose the branch $e^{i\mathfrak{b}}\mathbf{R}_+$ and the corresponding determination of the logarithm to define $W_{s^0,\theta}^{p}(X,Y)$ on $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- \times \mathbf{C} \setminus e^{i\mathfrak{b}}\mathbf{R}_+$, then we have $p^{-t} \in e^{i\mathfrak{b}}\mathbf{R}_+$ if and only if there exists $k \in \mathbf{Z}$ such that

$$\Im(t) = \frac{2k\pi - \mathfrak{b}}{\log(p)}; \tag{7.16}$$

hence there is at most a finite number of such $t \in \Xi_{u,\eta}$ verifying (7.16); which justifies the fact that $W_{\mathbf{s}^0,\theta}^{p}\left(p^{-1}, p^{-t}\right)$ is well defined for almost all $t \in \Xi_{u,\eta}$.

Remarque 25. $W_{\mathbf{s}^0,\theta}^{p}(X,Y)$ is not a polynomial with integral coefficients.

However according to Proposition 8, we can write $W_{\mathbf{s}^0,\theta}^{p}(X,Y)$ under the form of a product

$$\prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \left(1 - X^{\sum_{j=1}^{r} \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle} Y^{\sum_{j=1}^{r} \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle}\right)^{\gamma_{p,\gamma^0}(\beta)}; \tag{7.17}$$

unless this time the powers $\gamma_{p,\gamma^0}(\beta)$ are a priori complex and the $1 - X^{\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle} Y^{\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}$ are not real monomials (i.e with integral powers).

We will say by misuse of langage that (7.17) is the cyclotomic expansion of $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ and that $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ is cyclotomic if its cyclotomic expansion is a finite product.

Lemme 27. *There exists a generic set*

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E} := \left\{\gamma^0 \in \mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{s}^0 = \sigma^0 + i\gamma^0 \in \mathcal{B} \cap \partial W(0)\right\}$$

(i.e. $\mathcal{E} \setminus \mathcal{G}$ is a set of empty interior)
such that for all $\gamma^0 \in \mathcal{G}$, $W^p_{\boldsymbol{s}^0,\theta}(X,Y)$ is not cyclotomic.

Moreover if there exists, for a fixed prime number p, $\mathfrak{c} \in \mathbf{C}^*$ such that for all $X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ we have :

$$W_{\boldsymbol{s}^0,\theta}(X,\mathfrak{c}) := W^p_{\boldsymbol{s}^0,\theta}\mid_{\gamma^0=\boldsymbol{o}}(X,\mathfrak{c}) = 0$$

(by choosing obviously an half-line $e^{i\mathfrak{b}}\mathbf{R}_+$ and a corresponding determination of the logarithm so that $W^p_{\boldsymbol{s}^0,\theta}\mid_{\gamma^0=\boldsymbol{o}}(X,\mathfrak{c})$ is defined for $X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ and $\mathfrak{c} \in \mathbf{C} \setminus e^{i\mathfrak{b}}\mathbf{R}_+$);

then necessarily $|\mathfrak{c}| \neq 1$ and h is a reducible polynomial or can be reduced to a one variable polynomial in $\mathbf{Q}[T]$ via the change of variable $T := \boldsymbol{X}^{\alpha_e}$.

Preuve. Let us use the writing of Corollary 7.3.2 for $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}$. We have :

$$1+\sum_{j=1}^r a_j p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle} X^{\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle} Y^{\langle\theta,\alpha_j\rangle} = \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} \left(1 - X^{\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle} Y^{\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}\right)^{\gamma_{p,\gamma^0}(\beta)}; \tag{7.18}$$

where

$$\gamma_{p,\gamma^0}(\beta) = \sum_{\substack{\mathbf{b}\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}\\ m\in\mathbf{N}\\ m\mathbf{b}=\beta}} \left((-1)^{\|\mathbf{b}\|}\frac{\mu(m)}{m}\frac{(\|\mathbf{b}\|-1)!}{b_1!...b_r!}\left(a_1 p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_1\rangle}\right)^{b_1}...\left(a_r p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_r\rangle}\right)^{b_r}\right). \tag{7.19}$$

We want prove that this cyclotomic expansion is infinite (i.e. don't reduces to a finite product) for γ^0 generic.

We have to take into consideration the possible grouping of some terms. For this we consider the following equivalence relation $\sim_W$ on $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\beta \sim_W \beta' \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^r \beta_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle = \sum_{j=1}^r \beta'_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle \\ \sum_{j=1}^r \beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle = \sum_{j=1}^r \beta'_j\langle\theta,\alpha_j\rangle. \end{cases} \tag{7.20}$$

Write $[\beta]$ the equivalence class of $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ and $\mathcal{J}$ a set of representatives of each class modulo the relation $\sim_W$. We also put :

$$\gamma_{p,\gamma^0}\left([\beta]\right) = \sum_{\beta' \sim_W \beta} \gamma_{p,\gamma^0}\left(\beta'\right).$$

The equality (7.18) can be rewritten as the following form :

$$1 + \sum_{j=1}^{r} a_j p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle} X^{\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle} Y^{\langle\theta,\alpha_j\rangle} = \prod_{[\beta]\in\mathcal{J}} \left(1 - X^{\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle} Y^{\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}\right)^{\gamma_{p,\gamma^0}([\beta])}; \tag{7.21}$$

with here the monomials two at a time distinct.

We want to verify that this product (7.21) is infinite for $\gamma^0 \in \mathbf{R}^n$ in a generic set ; meaning that there exists infinitely many $\gamma_{p,\gamma^0}([\beta]) \neq 0$ for $\gamma^0 \in \mathbf{R}^n$ generic.

Firstly consider the case where $\gamma^0 = \mathbf{0}$.

To begin, we can remark according to the identity (7.19) that for all $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\gamma_{p,\gamma^0}\left(\beta\right)|_{\gamma^0=\mathbf{0}} = \gamma(\beta); \tag{7.22}$$

the $\gamma(\beta)$ being those appearing in the cyclotomic expansion of h.

Prove that $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)|_{\gamma^0=\mathbf{0}}$ is not cyclotomic.

We know that

$$h(\mathbf{X}) = \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} \left(1 - \mathbf{X}^{\sum_{j=1}^r \beta_j\alpha_j}\right)^{\gamma(\beta)} \tag{7.23}$$

is not cyclotomic and consequently its cyclotomic decomposition cannot be reduced to a finite product.

Rewrite as previously this product after the grouping of its terms.

We have to define again an equivalence relation $\sim_h$ on $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ which takes account of the possible groupings in the writing (7.23) :

$$\beta \sim_h \beta' \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^r \beta_j\alpha_j = \sum_{j=1}^r \beta'_j\alpha_j.$$

Prove that the relations $\sim_h$ and $\sim_W$ are exactly the same.

Firstly, it is clear that $\beta \sim_h \beta'$ implies $\beta \sim_W \beta'$.

Reciprocally, if $\beta \sim_W \beta'$, then we have :

1. $\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle = \sum_{j=1}^r \beta'_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle$,
2. $\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle = \sum_{j=1}^r \beta'_j\langle\theta,\alpha_j\rangle$;

and the first equality gives according to the genericity condition (7.13) on σ^0 the existence of $q \in \mathbf{Q}$ such that :

$$\sum_{j=1}^{r} \beta'_j \alpha_j = \sum_{j=1}^{r} \beta_j \alpha_j + q\alpha_e.$$

The second equality permits to assert that :

$$q\langle \theta, \alpha_e \rangle = 0;$$

and hence $q = 0$ since $\langle \theta, \alpha_e \rangle \neq 0$; which gives $\beta \sim_h \beta'$.

Thus, we can define :

$$\gamma([\beta]) = \sum_{\beta' \sim_h \beta} \gamma(\beta');$$

so that :

$$h(\mathbf{X}) = \prod_{[\beta] \in \mathcal{J}} \left(1 - \mathbf{X}^{\sum_{j=1}^{r} \beta_j \alpha_j}\right)^{\gamma([\beta])}$$

is a product whose monomials are two at a time distinct.

Notice that this product is infinite (i.e. there are infinitely many $\gamma([\beta]) \neq 0$) since h is not cyclotomic by hypothesis.

Moreover we have for all $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\begin{aligned} \gamma([\beta]) &= \sum_{\beta' \sim_h \beta} \gamma(\beta') \\ &= \sum_{\beta' \sim_W \beta} \gamma_{p,\gamma^0}(\beta') \mid_{\gamma^0 = \mathbf{0}} \text{ according to (7.22)} \\ &= \gamma_{p,\gamma^0}([\beta]) \mid_{\gamma^0 = \mathbf{0}} . \end{aligned}$$

Consequently, there exists a infinite subset I of $\mathbf{N}^r$ independent of p such that for all $\beta \in I$ and for all prime number p, the function $f_{\beta,p}$:

$$f_{\beta,p} \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \gamma^0 & \longmapsto & f_{\beta,p}(\gamma^0) := \gamma_{p,\gamma^0}([\beta]) \end{array}$$

is nonzero (it suffices to put $\beta \in I$ if and only if $\gamma([\beta]) \mid_{\gamma^0 = \mathbf{0}} = \gamma([\beta]) \neq 0$).

In addition, these functions $f_{\beta,p}$ (p prime, $\beta \in I$) are holomorphic in γ^0 on $\mathbf{C}^n$ since the $\gamma_{p,\gamma^0}([\beta])$ are finite sums of $\gamma_{p,\gamma^0}(\beta')$ which are holomorphic on $\mathbf{C}^n$ as shown in (7.19).

then it suffices to use Lemma 26 to deduce that for all prime number p and for all $\beta \in I$ the set

$$f_{\beta,p}^{-1}(0)$$

is a complex hypersurface of $\mathbf{C}^n$ of dimension at most $n-1$ of empty interior inside $\mathbf{C}^n$ and even inside $\mathbf{R}^n$[1].

Consequently, the countable union

$$M := \bigcup_{\beta \in I, p \text{ prime}} f_{\beta,p}^{-1}(0)$$

is also of empty interior inside $\mathbf{R}^n$ according to Baire's theorem.

Finally, if $\gamma^0 \notin M$, the expansion (7.21) admits infinitely many nonzero exponents, which proves the first assertion of the lemma.

Now assume that there exists $\mathfrak{c} \in \mathbf{C}^*$ such that for all $X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$:

$$W_{s^0,\theta}(X, \mathfrak{c}) := W^p_{s^0,\theta} \mid_{\gamma^0=\mathbf{0}} (X, \mathfrak{c}) = 0.$$

For all $X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ we have :

$$\begin{aligned} W^p_{\mathbf{s}^0,\theta} \mid_{\gamma^0=\mathbf{0}} (X, \mathfrak{c}) &= 1 + \sum_{j=1}^{r} a_j X^{\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle} \mathfrak{c}^{\langle \theta, \alpha_j \rangle} \\ &= h\left(X^{\sigma_1^0} \mathfrak{c}^{\theta_1}, \ldots, X^{\sigma_n^0} \mathfrak{c}^{\theta_n}\right) \equiv 0. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Moreover, the generic choice of σ^0 can be expressed by the fact that the only constraint its components must verify is $\langle \sigma^0, \alpha_e \rangle = 0$.

Consequently, if we assume without loss of generality that $\alpha_e^n \neq 0$, we can consider $\sigma^0 \in \mathbf{R}^n$ (such that $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{B} \cap \partial W(0)$) as a $(n-1)$-uple $\widetilde{\sigma}^0 = (\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0) \in U \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$ (U open set of $\mathbf{R}^{n-1}$) by putting :

$$\begin{cases} \sigma_\ell^0 = \widetilde{\sigma}_\ell^0 & (\ell \in \{1, \ldots, n-1\}), \\ \sigma_n^0 = -\dfrac{1}{\alpha_e^n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_e^i \widetilde{\sigma}_i^0 & . \end{cases}$$

Then define for all $x \in \mathbf{R}_{>0}$:

$$\Phi_x : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbf{R}^{n-1} \\ \widetilde{\sigma}^0 = (\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0) & \longmapsto & \left(x^{\widetilde{\sigma}_1^0}, \ldots, x^{\widetilde{\sigma}_{n-1}^0}\right). \end{array}$$

It is clear that $\bigcup_{x>0} \Phi_x(U)$ describes a nonempty open set U' of $(0, \infty)^{n-1}$.

Consequently, for all $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \in U'$ there exists $x > 0$ and $\widetilde{\sigma}^0 = (\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0) \in U$ such that $(t_1, \ldots, t_{n-1}) = \left(x^{\widetilde{\sigma}_1^0}, \ldots, x^{\widetilde{\sigma}_{n-1}^0}\right)$ and we have :

[1]Here we use the fact that any holomorphic function on an open set $O \subseteq \mathbf{C}^n$ zero on $O \cap \mathbf{R}^n$ is necessarily zero on O.

$$\begin{aligned} h\left(t_1\mathfrak{c}^{\theta_1},\ldots,t_{n-1}\mathfrak{c}^{\theta_{n-1}},\mathfrak{c}^{\theta_n}\prod_{\ell=1}^{n-1}t_\ell^{-\frac{\alpha_e^\ell}{\alpha_e^n}}\right) &= h\left(x^{\sigma_1^0}\mathfrak{c}^{\theta_1},\ldots,x^{\sigma_n^0}\mathfrak{c}^{\theta_n}\right)\\ &= 0 \text{ according to (7.24).}\end{aligned}$$

Moreover, there exists a nonempty open set U'' of $(0,\infty)^{n-1}$ such that for all $(y_1,\ldots,y_{n-1})\in U''$ there exists $(t_1,\ldots,t_{n-1})\in U'$ verifying for all $i\in\{1,\ldots,n-1\}$:

$$y_i^{\alpha_e^n}=t_i.$$

But the function

$$(y_1,\ldots,y_{n-1})\longmapsto h\left(y_1^{\alpha_e^n}\mathfrak{c}^{\theta_1},\ldots,y_{n-1}^{\alpha_e^n}\mathfrak{c}^{\theta_{n-1}},\mathfrak{c}^{\theta_n}\prod_{\ell=1}^{n-1}y_\ell^{-\alpha_e^\ell}\right)$$

is holomorphic on $(\mathbf{C}^*)^{n-1}$.

And since it vanishes on an open set U'' de $(0,\infty)^{n-1}$, we have in fact

$$\forall(y_1,\ldots,y_{n-1})\in(\mathbf{C}^*)^{n-1},\ h\left(y_1^{\alpha_e^n}\mathfrak{c}^{\theta_1},\ldots,y_{n-1}^{\alpha_e^n}c_p^{\theta_{n-1}},\mathfrak{c}^{\theta_n}\prod_{\ell=1}^{n-1}y_\ell^{-\alpha_e^\ell}\right)=0.$$

Hence the polynomial $h(X_1,\ldots,X_n)$ vanishes on $\mathcal{H}\cap(\mathbf{C}^*)^{n-1}$ where $\mathcal{H}$ is the complex hypersurface defined by the equation :

$$\mathfrak{c}^{-\langle\theta,\alpha_e\rangle}\mathbf{X}^{\alpha_e}-1=\prod_{\ell=1}^{n}X_\ell^{\alpha_e^\ell}\mathfrak{c}^{-\theta_\ell\alpha_e^\ell}-1=0.$$

We deduce that the polynomial $X_1\cdots X_{n-1}h(X_1,\ldots,X_n)$ vanishes on the whole hypersurface $\mathcal{H}$ and hence the polynomial $\mathfrak{c}^{-\langle\theta,\alpha_e\rangle}\mathbf{X}^{\alpha_e}-1$ divides a power of the polynomial $X_1\ldots X_{n-1}\ h(X_1,\ldots,X_n)$. Since the polynomials $\mathfrak{c}^{-\langle\theta,\alpha_e\rangle}\mathbf{X}^{\alpha_e}-1$ and $X_1\ldots X_{n-1}$ are relatively prime, we deduce that the polynomial

$$P_\mathfrak{c}(\mathbf{X}):=\mathfrak{c}^{-\langle\theta,\alpha_e\rangle}\mathbf{X}^{\alpha_e}-1 \tag{7.25}$$

necessarily divides a power of h ; and hence $P_\mathfrak{c}(\mathbf{X})$ divides also h because all irreducible factors of $P_\mathfrak{c}(\mathbf{X})$ are of multiplicity 1.

And since h is with rational coefficients and $\mathfrak{c}$ is an algebraic number, the polynomial

$$Q(\mathbf{X}):=\prod_{\mathfrak{c}'}P_{\mathfrak{c}'}(\mathbf{X})\in\mathbf{Q}[\mathbf{X}]$$

(where the product is done over all the conjugates $\mathfrak{c}'$ of $\mathfrak{c}$) also divides h.

Remark that $Q(\mathbf{X})$ can be reduce in fact to a one variable polynomial (by the change of variable $T := \mathbf{X}^{\alpha_e}$).

Hence h is necessarily a reducible polynomial or can be reduced to a one variable polynomial[2] in $\mathbf{Q}[T]$ via the change of variable $T := \mathbf{X}^{\alpha_e}$.

Moreover, if we assume by absurd that $|\mathfrak{c}| = 1$, we could apply the criterion ii) of cyclotomy of Estermann's result to the one variable polynomial $Q(\mathbf{X})$ to deduce that this polynomial is cyclotomic; which is not possible since h does not contain any cyclotomic factor by hypothesis.

□

Now the idea is to use one of the tools which have been developped by M. du Sautoy when he studied Euler products associated to a polynomial of two variables ([10]). He uses in particular the Puiseux series theory, a generalization of the implicit functions theorem.

However, the classical Puiseux theory fits badly for the class of generalized polynomials since the classical Puiseux algorithm applied to a generalized polynomial don't provide a priori a convergent solution or even a formal solution.

In addition, the using of the multivariable Puiseux theory don't provide satisfactory results because of a very bad control of the domain of convergence of the solutions.

This is the reason why we use the hypothesis of Definition 35 which permits to reduce the problem and to apply the implicit functions theorem by considering these generalized polynomials as multivariable polynomials whose variables are specialized; in this way we justify the existence and the convergence, for $X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_{-}$, $|X|$ in the neighbourhood of 0, of the solutions.

Moreover, it is possible to define the Newton polygon of such generalized polynomial as in [29],p. 98.

Thus we have a method based on the Newton polygon of $W^{p}_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ to compute the solutions whose existence is ensured by the implicit functions theorem.

Définition 40. Let
$$f(X,Y) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{r'} a_{\mu_i,\nu_j} X^{\mu_i} Y^{\nu_j},$$
where for all $i \in \{1,\dots,r\}$ $\mu_i \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ and $\mu_i = 0$ for at least one i and for all $j \in \{1,\dots,r'\}$ $\nu_j \in \mathbf{Q}_{>0}$.

We call $\mathcal{S}(f) = \left\{(\mu_i,\nu_j), a_{\mu_i,\nu_j} \neq 0\right\}$ the support of f and we put $P_{i,j}$ the point of coordinates (μ_i,ν_j). The lower convex hull of $\mathcal{S}(f)$ is a convex polygon which defines

[2]In fact in whole the text, we can suppose without loss of generality that this situation does not occur, because if $h(\mathbf{X})$ can be reduced to a one variable polynomial in $T = \mathbf{X}^{\alpha_e}$ it would suffice to apply Estermann theorem for the one variable polynomials to determine the natural boundary of $Z(\mathbf{s})$.

the Newton polygon $N(f)$ of f. $N(f)$ is composed of a finite number of segments whose vertices are among the points $P_{i,j}$, and any other element of $\mathcal{S}(f)$ lies on or above the union of these segments.

We want to express, for X in a neighbourhood of 0, Y as a function of X such that $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)=0$.

However, $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ is not a real polynomial; and we must justify why it is possible to generalize the Puiseux theory (that we could find in [7]) for the polynomials of two variables to this class of generalized polynomials. The main difficulty here comes from the fact that the exponents of the monomials of $W_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ are not integers; hence $W_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ is defined from a determination of a logarithm and does not defined a regular function in $X=0$.

Puiseux theorem for $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$:

Définition 41. We put $\widehat{\alpha}_e \in \mathbf{N}^*$ the vector collinear with α_e whose nonzero components are relatively prime. In this way, if $j \in \Lambda_e$, there exists $q_j \in \mathbf{N}^*$ such that $\alpha_j = q_j\widehat{\alpha}_e$.

then we put :

$$\widetilde{[h]_e}(T) := 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j T^{q_j}.$$

Since $\mathcal{F}(\alpha_e)$ is supposed to be a nondegenerate face, the polynomial $\widetilde{[h]_e}(T)$ has no multiple root.

For the following we will suppose that $\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle$ is a positive integer (we will precise later (see (7.34)) that we choose θ so that $\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle$ is a positive even integer).

Proposition 9. *(***Puiseux theorem for $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$***).*
We fix p, θ and $\mathbf{s}^0$.
Let $q \in \mathbf{N}^*$ be the smallest positive integer verifying $q\langle\alpha_j,\theta\rangle \in \mathbf{N}^*$ for all $j=1,\dots,r$.
We consider the finite set

$$\mathfrak{p} := \left\{ c_p \in \mathbf{C};\ \exists c \text{ root of } \widetilde{[h]_e}(T) \text{ such that } c_p^{q\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle} = p^{i\langle\gamma^0,\widehat{\alpha}_e\rangle} c\right\}.$$

There exists $\epsilon_1 > 0$ (not depending on p) such that for all $X \in \mathcal{H} := \{X \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-, |X| < \epsilon_1\}$ the equation $W^p_{s^0,\theta}(X,Y)=0$ admits the set of solutions

$$Y = Y_{c_p}(X)\ (c_p \in \mathfrak{p});$$

where for all $c_p \in \mathfrak{p}$ $X \longmapsto Y_{c_p}(X)$ is an holomorphic function on $\mathcal{H}$ and satisfies for all $X \in \mathcal{H}$:

$$Y_{c_p}(X) = \sum_{k=0}^{\kappa_{c_p}} \mathfrak{c}_k(c_p,p) X^{\vartheta_k},$$

with

1. $\kappa_{c_p} \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ *;*
2. $\vartheta_0 = 0 < \vartheta_1 < \cdots$ *is a stricly increasing sequence ;*
3. $\lim_{k\to+\infty} \vartheta_k = +\infty$ *if* $\kappa_{c_p} = +\infty$ *;*
4. *there exists two constants* $D_{\epsilon_0} > 1$ *and* $A(\sigma^0) > 0$ *(independing of* p *and* k*) such that*
$$|\mathfrak{c}_k(c_p, p)| \ll D_{\epsilon_0}^{A(\sigma^0)\vartheta_k}$$
uniformly in p *prime and in* k *;*
5. $\mathfrak{c}_0(c_p, p) = c_p^q$, *in particular*
$$|\mathfrak{c}_0(c_p, p)| = |c|^{\frac{1}{\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle}}.$$

Moreover

$$\{\mathfrak{c}_0(c_p, p); c_p \in \mathfrak{p}\} = \{u \in \mathbf{C};\ \exists c \text{ root of } \widetilde{[h]}_e(T) \text{ such that } u^{\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle} = p^{i\langle\gamma^0,\widehat{\alpha}_e\rangle}c\}.$$

Preuve. We make the change of variable $Y = Y_1^q$. The problem is reduced to resolve the equation

$$\begin{aligned}
\tilde{W}^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X, Y_1) &:= W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X, Y_1^q)\\
&= 1 + \textstyle\sum_{j=1}^r a_j p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle} X^{\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle} Y_1^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle}\\
&= 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle} Y_1^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle} + \sum_{j\notin\Lambda_e} a_j p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle} X^{\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle} Y_1^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle}\\
&= 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j p^{-iq_j\langle\gamma^0,\widehat{\alpha}_e\rangle} Y_1^{qq_j\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle} + \sum_{j\notin\Lambda_e} a_j p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle} X^{\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle} Y_1^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle}.
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Now if $Y_1 = Y_1(X) = c_p + o(1)$ for $X \to 0^+$ is a solution of $W_{\mathbf{s}^0,\theta}(X, Y_1) = 0$ when $X \to 0^+$, then we have necessarily :

$$1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j p^{-iq_j\langle\gamma^0,\widehat{\alpha}_e\rangle} c_p^{qq_j\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle} = 0;$$

and hence

$$c = p^{-i\langle\gamma^0,\widehat{\alpha}_e\rangle} c_p^{q\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle}$$

is a root of the polynomial $\widetilde{[h]}_e(T) = 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j T^{q_j}$. We deduce that c_p is a root of $q\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle$-th of $p^{i\langle\gamma^0,\widehat{\alpha}_e\rangle}c$ where c is a root of the polynomial $\widetilde{[h]}_e(T)$.
Thus $c_p \in \mathfrak{p}$.

Reciprocally, let $c_p \in \mathfrak{p}$. Then there exists a root c of the polynomial $\widetilde{[h]}_e(T)$ such that $c_p^{q\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle} = p^{i\langle\gamma^0,\widehat{\alpha}_e\rangle}c$.

The root c of $\widetilde{[h]}_e(T)$ is necessarily nonzero since $\widetilde{[h]}_e(0) = 1 \neq 0$.

We make the change of variable

$$Y_1 = c_p\,(1 + Y_2)\,.$$

We search $Y_2 = Y_2(X)$ such that $\tilde{W}^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X, c_p(1 + Y_2(X))) = 0$ and $Y_2(X) \to 0$ when $X \to 0^+$.

We put :

$$G(X, Y_2) := \tilde{W}^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X, c_p(1 + Y_2)).$$

Then we have :

$$\begin{aligned}
G(X, Y_2) &= 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j p^{-iq_j\langle\gamma^0,\widehat{\alpha}_e\rangle} c_p^{qq_j\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle}\,(1 + Y_2)^{qq_j\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle} \\
&\quad + \sum_{j\notin\Lambda_e} a_j p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle} X^{\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle} c_p^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle}(1 + Y_2)^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle} \\
&= 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j c^{q_j}(1 + Y_2)^{qq_j\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle} \\
&\quad + \sum_{j\notin\Lambda_e} a_j p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle} c_p^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle} X^{\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}\,(1 + Y_2)^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle}
\end{aligned}$$

Since the $\langle\theta, \alpha_j\rangle \in \mathbf{Q}_{>0}$ and the $\langle\sigma^0, \alpha_j\rangle \in \mathbf{R}_{>0}$ ($j \notin \Lambda_e$) and by the choice of q, $G(X, Y_2)$ is defined and holomorphic on $\mathcal{D}_1 := \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- \times \mathbf{C}$.

Put for all $\mathbf{X} = (X_j)_{j\notin\Lambda_e} \in \mathbf{C}^{r-\#\Lambda_e}$ and for all $Y_2 \in \mathbf{C}$:

$$F(\mathbf{X}, Y_2) := 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j c^{q_j}(1 + Y_2)^{qq_j\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle} + \sum_{j\notin\Lambda_e} a_j X_j(1 + Y_2)^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle}.$$

This function $(\mathbf{X}, Y_2) \longmapsto F(\mathbf{X}, Y_2)$ is clearly holomorphic on $\mathcal{U} = \mathbf{C}^{r-\#\Lambda_e} \times \mathbf{C}$ and we also notice that this polynomial does not depend on p.

Moreover, for all $(X, Y_2) \in \mathcal{D}_1$ we have :

$$G(X, Y_2) = F\left(\left(p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle} c_p^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle} X^{\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}\right)_{j\notin\Lambda_e}, Y_2\right). \tag{7.27}$$

Furthermore, we easily check that in the neighbourhood of $(\mathbf{X}, Y_2) = (\mathbf{0}, 0)$ we have :

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{X}, Y_2) &= 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j c^{q_j}\left(1 + qq_j\langle\theta, \widehat{\alpha}_e\rangle Y_2 + O(Y_2^2)\right) + O\left(\|X\|\right) \\
&= 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j c^{q_j} + q\langle\theta, \widehat{\alpha}_e\rangle\left(\sum_{j\in\Lambda_e} a_j q_j c^{q_j}\right) Y_2 + O\left(\|X\|\right) + O\left(Y_2^2\right) \\
&= \widetilde{[h]}_e(c) + q\langle\theta, \widetilde{\alpha}_e\rangle c\widetilde{[h]}'_e(c)Y_2 + O\left(\|X\|\right) + O\left(Y_2^2\right).
\end{aligned}$$

And since the face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ is a nondegenerate face by hypothesis, c is a simple root of $\widetilde{[h]}_e(T)$, and hence $\widetilde{[h]}_e(c)=0$ and $\widetilde{[h]}'_e(c)\neq 0$.

We deduce that

$$\frac{\partial F}{\partial Y_2}(\mathbf{0},0)=q\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle c\widetilde{[h]}'_e(c)\neq 0.$$

Hence, according to the implicit functions theorem, there exists $\epsilon_0=\epsilon_0(h)>0$ (independent of p) such that

$$\begin{cases}\mathbf{X}\in D(\mathbf{0},\epsilon_0)=\{\mathbf{X}\in\mathbf{C}^{r-\#\Lambda_e}\mid \|X\|<\epsilon_0\}\\ F(\mathbf{X},Y_2)=0\end{cases}$$

is equivalent to

$$\begin{cases}\mathbf{X}\in D(\mathbf{0},\epsilon_0)=\{\mathbf{X}\in\mathbf{C}^{r-\#\Lambda_e}\mid \|X\|<\epsilon_0\}\\ Y_2=V_{c_p}(\mathbf{X});\end{cases}\tag{7.28}$$

where

$$\begin{aligned}V_{c_p}(\mathbf{X}) &= \sum_{(\mu_j)_{j\notin\Lambda_e}=\mu\in\mathbf{N}^{r-\#\Lambda_e}} A(c_p;\mu)\mathbf{X}^{\mu}\\ &= \sum_{(\mu_j)_{j\notin\Lambda_e}=\mu\in\mathbf{N}^{r-\#\Lambda_e}} A(c_p;\mu)\prod_{j\notin\Lambda_e}X_j^{\mu_j}\end{aligned}$$

converges and is holomorphic in $D(\mathbf{0},\epsilon_0)$.

In particular, we have uniformly in p prime :

$$|A(c_p;\mu)|\ll\left(\frac{2}{\epsilon_0}\right)^{\sum_{j\notin\Lambda_e}\mu_j}.\tag{7.29}$$

Now since $\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle>0$ for all $j\notin\Lambda_e$ and since $|p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle}c_p^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle}|=|c|^{\frac{\langle\theta,\alpha_j\rangle}{\langle\theta,\widehat{\alpha}_e\rangle}}$ for all $j\notin\Lambda_e$, the identity (7.27) implies the existence of $\epsilon_1=\epsilon_1(h,\sigma^0)>0$ (independent of p) such that for all $X\in\mathcal{H}:=\{X\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-:|X|<\epsilon_1\}$, the point

$$\mathbf{X}(p)=\left(p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle}c_p^{q\langle\theta,\alpha_j\rangle}X^{\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}\right)_{j\notin\Lambda_e}\in D(\mathbf{0},\epsilon_0);$$

and

$$V_{c_p}(\mathbf{X}(p))=\sum_{\mu=(\mu_j)_{j\notin\Lambda_e}}A(c_p;\mu)p^{-i\sum_{j\notin\Lambda_e}\mu_j\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle}c_p^{q\sum_{j\notin\Lambda_e}\mu_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}X^{\sum_{j\notin\Lambda_e}\mu_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}.$$

Put

$$\mathfrak{K}:=\left\{\sum_{j\notin\Lambda_e}\mu_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle:\mu=(\mu_j)_{j\notin\Lambda_e}\in\mathbf{N}^{r-\#\Lambda_e}\right\}.$$

$\mathfrak{K}$ is a discrete part of $\mathbf{R}_+^*$ and there exists a strictly increasing sequence (finite or infinite) of $\mathbf{R}_+^*$ such that

$$\mathfrak{K} = \{\vartheta_k : k = 1, \ldots, \kappa_{c_p}\}$$

with $\kappa_{c_p} \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.

Moreover, it is clear that if $\kappa_{c_p} = +\infty$ then $\lim_{k \to +\infty} \vartheta_k = +\infty$.

And if we put for all $k \leq \kappa_{c_p}$:

$$\mathfrak{c}_k(c_p, p) = \sum_{\substack{\mu = (\mu_j)_{j \notin \Lambda_e} \in \mathbf{N}^{r - \#\Lambda_e} \\ \sum_{j \notin \Lambda_e} \mu_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle = \vartheta_k}} A(c_p; \mu) p^{-i \sum_{j \notin \Lambda_e} \mu_j \langle \gamma^0, \alpha_j \rangle} c_p^{q \sum_{j \notin \Lambda_e} \mu_j \langle \theta, \alpha_j \rangle};$$

the fact that $\mu_j \leq \frac{\vartheta_k}{\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle}$ for all $j \notin \Lambda_e$ since $\sum_{j \notin \Lambda_e} \mu_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle = \vartheta_k$ and (7.29) provide the estimation uniformly in p prime

$$|\mathfrak{c}_k(c_p, p)| \ll \left(\frac{2}{\epsilon_0}\right)^{\left(\sum_{j \notin \Lambda_e} \frac{1}{\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle}\right) \vartheta_k} \prod_{j \notin \Lambda_e} \frac{\vartheta_k}{\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle} \tag{7.30}$$

uniformly in p prime and in k.

Consequently we have for all $X \in \mathcal{H} = \{X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- : |X| < \epsilon_1\}$:

$$V_{c_p}(\mathbf{X}(p)) = \sum_{k=1}^{\kappa_{c_p}} \mathfrak{c}_k(c_p, p) X^{\vartheta_k}.$$

We conclude using the fact that $Y = (c_p(1 + Y_2))^q = c_p^q (1 + Y_2)^q$.

□

Remarque 26. Notice that the solutions obtained in Y of $W^p_{s^0, \theta}(X, Y) = 0$ appear as q-th powers.

Thus there will be no problem in the following related to the manipulation of rational powers $\langle \theta, \alpha_j \rangle$ in Y of $W^p_{s^0, \theta}(X, Y)$ when we will replace Y by these solutions.

To simplify the writing introduced in the previous proposition, in the whole following we will write the solutions of $W_{\mathbf{s}^0, \theta}(X, Y) = 0$ (in finite number) as follows :

$$\Omega_k^p(X) = c_{k,0}^p + c_{k,1}^p X^{\vartheta_{k,1}} + \cdots + c_{k,N}^p X^{\vartheta_{k,N}} + \cdots; \ (k \in \{1, \ldots, f\})$$

where $\vartheta_{k,N} > \cdots, > \vartheta_{k,1} > 0$ and $c_{k,m}^p \in \mathbf{C}$ for all $m \geq 0$.

In particular $c_{k,0}^p$ is a root of the one variable polynomial :

$$[W^p_{\mathbf{s}^0, \theta}]_e(X) := 1 + \sum_{j \in \Lambda_e} a_j p^{-i \langle \gamma^0, \alpha_j \rangle} X^{\langle \theta, \alpha_j \rangle}.$$

We can also notice that if we put

$$c_{k,0} := c_{k,0}^{p} p^{-i\frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}}, \tag{7.31}$$

$|c_{k,0}| = |c_{k,0}^p|$ and $c_{k,0}$ is a root of

$$[h]_e^\theta(X) := 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j X^{\langle\theta,\alpha_j\rangle}.$$

Thus we can describe the zeroes of $t \longmapsto W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p(p^{-1}, p^{-t})$ via these Puiseux branches ; they can be expressed as follows :

$$t_{m,p} = -\frac{\log\left(\Omega_k^p\left(p^{-1}\right)\right)}{\log(p)} + \frac{2\pi m i}{\log(p)};$$

where $m \in \mathbf{Z}$ and p is a prime number large enough.

Now the main difficulty consists in finding an infinite number of $t_{m,p}$ of positive real part ; which comes down to find Puiseux branches $\Omega_k^p(X)$ such that $|\Omega_k^p(X)| < 1$ for $X > 0$ small enough so that, for p large enough, we have $t_{m,p} \in \Xi_{u,\eta}$ and we will show in the following that we can always find a such branch $\Omega_k^p(X)$ such that $|\Omega_k^p(X)| < 1$ for $X > 0$ small enough.

Note in passing that for p large enough $W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p(X, Y)$ is well defined by putting $X = p^{-1}$ and $Y = p^{-t(m,p)}$ since $p^{-1} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ and $p^{-t(m,p)} \in \mathbf{C} \setminus e^{i\mathfrak{b}}\mathbf{R}_+$ since :

$$\begin{aligned}
\Im(t(m,p)) &= \Im\left(-\frac{\log\left(\Omega_k^p(p^{-1})\right)}{\log(p)} + \frac{2i\pi m}{\log(p)}\right)\\
&= \frac{-\arg(c_{k,0}^p) + O\left(p^{-\vartheta_{k,1}}\right) + 2\pi m}{\log(p)}\\
&= \frac{-\arg(c_{k,0}) + O\left(p^{-\vartheta_{k,1}}\right) + 2\pi m}{\log(p)} - \frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle} \notin \frac{-\mathfrak{b} + 2\mathbf{Z}\pi}{\log(p)}
\end{aligned}$$

if we choose $\gamma^0 \in \mathbf{R}^n$ generically.

So if this $[h]_e^\theta(X)$ is not cyclotomic (which is equivalent to have that $[h]_e$ and $[W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p]_e$ are not cyclotomic), according to the fact that it is a polynomial with integral coefficients whose product of its roots is less than or equal to 1, there exists at least one root c_{k_0} of modulus stricly less than 1 which produces a $c_{k,0}^p$ such that $|c_{k,0}^p| < 1$ and hence a Puiseux branch $\Omega_k^p(X)$ such that $|\Omega_k^p(X)| < 1$ for $|X|$ small enough as wanted.

The situation is more complicated when $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$ is cyclotomic since it will be necessary to study the second term which appear in the development of the Puiseux branches $\Omega^p_k(X)$ de $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$.

Thus assume, for the next two lemmas 28 et 29, that $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$ is cyclotomic.

Consider a set J made of representatives of each class of the following equivalence relation $\sim$:

$$\alpha_j \sim \alpha_{j'} \Longleftrightarrow \alpha_j - \alpha_{j'} \in \mathbf{Q}\alpha_e.$$

Then we write

$$W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y) = [W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e(Y) + \sum_{j_0\in J; j_0 \not\sim e} X^{\langle \sigma^0,\alpha_{j_0}\rangle} R^p_{j_0}(Y);$$

where

$$R^p_{j_0}(Y) = \sum_{j\sim j_0} a_j p^{-i\left\langle \gamma^0,\alpha_j\right\rangle} Y^{\langle \theta,\alpha_j\rangle}.$$

Recall that since we suppose here that $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e(Y)$ is a cyclotomic polynomial, all its roots are of modulus 1.

Now let $c^p_{k,0}$ be a root of $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$ of multiplicity $m_0 = 1$ since $\mathcal{F}(\alpha_e)$ is nondegenerate in the sense of Definition 35.

Consider in particular an index e' such that

$$\langle \sigma^0, \alpha_{e'}\rangle > 0$$

is minimal among the $\langle \sigma^0, \alpha_{j_0}\rangle > 0$ ($j_0 \in J, j_0 \not\sim e$) such that $R^p_{j_0}(c^p_{k,0}) \neq 0$.

Remark that such index exists e' according to lemma 27.

Indeed :

$$R^p_{j_0}(c^p_{k,0}) = \sum_{j\sim j_0} a_j p^{-i\left\langle \gamma^0,\alpha_j-\alpha_e\frac{\langle\theta,\alpha_j\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}\right\rangle} {c_{k,0}}^{\langle\theta,\alpha_j\rangle} \text{ according to (7.31).}$$

But if $\alpha_j = \alpha_{j_0} + q\alpha_e$, we obtain :

$$\begin{aligned} \alpha_j - \alpha_e\frac{\langle\theta,\alpha_j\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle} &= \alpha_{j_0} + q\alpha_e - \alpha_e\frac{\langle\theta,\alpha_{j_0}\rangle + q\langle\theta,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle} \\ &= \alpha_{j_0} - \alpha_e\frac{\langle\theta,\alpha_{j_0}\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}. \end{aligned}$$

Consequently since the $\alpha_j - \alpha_e\frac{\langle\theta,\alpha_j\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}$ are all equal for $j \sim j_0$ we have :

$$R^p_{j_0}(c^p_{k,0}) = 0$$

is equivalent to

$$R_{j_0}(c_{k,0}) := \sum_{j\sim j_0} a_j {c_{k,0}}^{\langle\theta,\alpha_j\rangle} = 0. \tag{7.32}$$

Thus if e' does not exist, we would have for all $X \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$:

$$W_{s^0,\theta}(X, c_{k,0}) := W^p_{s^0,\theta} \mid_{\gamma^0=\mathbf{0}} (X, c_{k,0}) = [h]^\theta_e(c_{k,0}) + \sum_{j_0 \in J; j_0 \not\sim e} X^{\langle \sigma^0, \alpha_{j_0} \rangle} R_{j_0}(c_{k,0}) = 0;$$

which is impossible according to Lemma 27 since here $|c_{k,0}| = |c^p_{k,0}| = 1$.

Obviously, it is possible to have some j_0 such that

$$\langle \sigma^0, \alpha_{e'} \rangle = \langle \sigma^0, \alpha_{j_0} \rangle. \tag{7.33}$$

However, if $\sigma^0 \in \mathbf{R}^n$ is chosen generically so that $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{B} \cap \partial W(0)$, the equality (7.33) implies necessarily that $j_0 \sim e'$.

For the following it is necessary to impose two supplementary conditions on θ.

From now on we assume that $\theta \in \mathbf{Q}^n$ satisfies, in addition to (7.14), the two following conditions :

$$\begin{array}{l} (a)\ \langle \theta, \widehat{\alpha}_e \rangle \in \mathbf{Z}_+ \ \textit{is even};\\ (b)\ \langle \theta, \alpha_{e'} \rangle \in \mathbf{Z}_+ \ \textit{is odd}. \end{array} \tag{7.34}$$

Notice that it is possible to impose such conditions on θ.

Indeed, the condition (7.14) is satisfied if we assume for example that $\theta_\ell > 1$ for all $\ell \in \{1, \ldots, n\}$.

Moreover, $\widehat{\alpha}_e$ and $\alpha_{e'}$ are not collinear (since $\langle \sigma^0, \alpha_{e'} \rangle > 0$) ; hence we can suppose without loss of generality that $\det \begin{pmatrix} \widehat{\alpha_e}^1 & \widehat{\alpha_e}^2 \\ \alpha^1_{e'} & \alpha^2_{e'} \end{pmatrix} \neq 0$ and if we put $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta')$ and $\alpha_j = (\alpha^1_j, \alpha^2_j, \alpha'_j)$ for $j \in \{e, e'\}$ (having fixed θ' such that $\theta_\ell > 1$ for $\ell > 2$), then the conditions (a) and (b) of (7.34) will be satisfied if we are able to find a solution $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{Q}^2$ verifying $\theta_1 > 1, \theta_2 > 1$ of some system

$$\begin{cases} \alpha^1_e \theta_1 + \alpha^2_e \theta_2 = A_k := 2k - \langle \theta', \widehat{\alpha}'_e \rangle; \\ \alpha^1_{e'} \theta_1 + \alpha^2_{e'} \theta_2 = B_{k'} := (2k'+1) - \langle \theta', \alpha'_{e'} \rangle \end{cases} \tag{7.35}$$

for a certain $k \in \mathbf{Z}_+$ and a certain $k' \in \mathbf{Z}_+$.

And the solutions (θ_1, θ_2) of (7.35) are given by :

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\alpha^2_{e'} A_k - \widehat{\alpha}^2_e B_{k'}}{\widehat{\alpha}^1_e \alpha^2_{e'} - \widehat{\alpha}^2_e \alpha^1_{e'}} \\ \theta_2 = \dfrac{-\alpha^1_{e'} A_k + \widehat{\alpha}^1_e B_{k'}}{\widehat{\alpha}^1_e \alpha^2_{e'} - \widehat{\alpha}^2_e \alpha^1_{e'}} \end{cases} \tag{7.36}$$

If we assume without loss of generality that

$$D := \det \begin{pmatrix} \widehat{\alpha_e}^1 & \widehat{\alpha_e}^2 \\ \alpha^1_{e'} & \alpha^2_{e'} \end{pmatrix} = \widehat{\alpha}^1_e \alpha^2_{e'} - \widehat{\alpha}^2_e \alpha^1_{e'} > 0$$

(it suffices for this to permute if necessary the two equalities in (7.35)), let us check that we can find $k, k' \in \mathbf{Z}_+$ such that :

$$\begin{array}{l} \alpha_{e'}^2 A_k - \widehat{\alpha}_e^2 B_{k'} > D \\ -\alpha_{e'}^1 A_k + \widehat{\alpha}_e^1 B_{k'} > D. \end{array} \tag{7.37}$$

But if $\widehat{\alpha}_e^2 = 0$ or $\alpha_{e'}^1 = 0$, it is clear that (7.37) will be verified for k, k' large enough.

And otherwise we obtain :

$$\frac{D + \widehat{\alpha}_e^2 B_{k'}}{\alpha_{e'}^2} < A_k < \frac{B_{k'}\widehat{\alpha}_e^1 - D}{\alpha_{e'}^1}; \tag{7.38}$$

and since

$$\left(\frac{B_{k'}\widehat{\alpha}_e^1 - D}{\alpha_{e'}^1}\right) - \left(\frac{D + \widehat{\alpha}_e^2 B_{k'}}{\alpha_{e'}^2}\right) = D\frac{B_{k'}}{\alpha_{e'}^1\alpha_{e'}^2} - D\left(\frac{1}{\alpha_{e'}^1} + \frac{1}{\alpha_{e'}^2}\right) \underset{k'\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

it is clear that we can find k and $k' \in \mathbf{Z}_+$ such that we have (7.38) and hence (7.37), which justifies the two conditions that we can impose on θ.

Notice that with this choice of θ, if $j_0 \sim e'$ then $\langle \theta, \alpha_{j_0} \rangle$ is an odd integer.

Indeed, $j_0 \sim e'$ implies the existence of $q \in \mathbf{N}$ such that $\alpha_{j_0} = \alpha_{e'} + q\widehat{\alpha}_e$; hence $\langle \theta, \alpha_{j_0} \rangle$ is odd since $\langle \theta, \alpha_{e'} \rangle$ is odd and $\langle \theta, \widehat{\alpha}_e \rangle$ is even.

Similarly, since all the $\langle \theta, \alpha_j \rangle$ for $j \in \Lambda_e$ are even integers, we have that $-c_{k,0}^p$ is a root of $[W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p]_e$.

Before showing the accumulation of zeroes $t_{m,p} \in \Xi_{u,\eta}$ (Lemma 29), let us start by enunciating an useful property :

Lemme 28. *Let* $\Omega_k^p(X) = c_{k,0}^p + c_{k,1}^p X^{\vartheta_{k,1}} + o\left(X^{\vartheta_{k,1}}\right)$ *a Puiseux branch of initial term* $c_{k,0}^p$*, root of* $[W_{s^0,\theta}^p]_e$*.*

Moving $\gamma^0 \in \mathbf{R}^n$ *if necessary so that* $s^0 \in \partial W(0) \cap \mathcal{B}$*, we can suppose that*

$$\arg\left(\frac{c_{k,1}^p}{c_{k,0}^p}\right) \neq \frac{\pi}{2} \mod (\pi).$$

This lemma will be proved just after the proof of Lemma 29 which follows.

Remarque 27. This result can be seen as a result of genericity concerning $\arg\left(\frac{c_{k,1}^p}{c_{k,0}^p}\right)$.

Remark that this property, essential to prove the accumulation of zeroes $t_{m,p} \in \Xi_{u,\eta}$ (see Lemma 29), is possible because we can move the point $\mathbf{s}^0$ in a open ball $\mathcal{B}$; which permits to have some freedom in the choice of $\gamma^0 \in \mathbf{R}^n$.

Lemme 29. *Assume that* $[W^p_{\boldsymbol{s}^0,\theta}]_e$ *is a cyclotomic polynomial.*

There exists a Puiseux series $\Omega^p_k(X)$, *solution of* $W^p_{\boldsymbol{s}^0,\theta}(X,Y)=0$, *verifying*

$$|\Omega^p_k(X)|<1 \text{ for } X>0 \text{ in a neighbourhood of } 0;$$

which provides an infinite number of zeroes $t_{m,p}\in\Xi_{u,\eta}$ *of* $\prod_{p\le M_\delta} h(p^{-s^0_1-t\theta_1},\dots,p^{-s^0_n-t\theta_n})$.

Preuve. Consider a Puiseux branch that we will write

$$\Omega^p_{k_+}(X)=c^p_{k,0}+c^p_{k_+,1}X^{\vartheta_{k_+,1}}+o\left(X^{\vartheta_{k_+,1}}\right)$$

of main term the root $c^p_{k,0}$ of $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$ introduced previously of multiplicity m_0.

According to Lemma 28, moving γ^0 if necessary, we can suppose that

$$\arg\left(\frac{c^p_{k_+,1}}{c^p_{k,0}}\right)\neq\frac{\pi}{2}\mod(\pi).$$

Thus we have

$$\frac{\pi}{2}<\arg\left(\frac{c^p_{k_+,1}}{c^p_{k,0}}\right)<\frac{3\pi}{2}\text{ or }\frac{\pi}{2}<\arg\left(-\frac{c^p_{k_+,1}}{c^p_{k,0}}\right)<\frac{3\pi}{2}.$$

Since $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$ is supposed to be cyclotomic, the main term of $\Omega^p_{k_+}$ is of modulus $|c^p_{k,0}|=1$.

But if we assume firstly that $\frac{\pi}{2}<\arg\left(\frac{c^p_{k_+,1}}{c^p_{k,0}}\right)<\frac{3\pi}{2}$, we have :

$$\left|\Omega^p_{k_+}(X)\right|=\left|1+\frac{c^p_{k_+,1}}{c^p_{k,0}}X^{\vartheta_{k_+,1}}+o(X^{\vartheta_{k_+,1}})\right|\;<\;1\quad\textit{for } X>0 \textit{ small.}$$

Hence $\Omega^p_k(X)=\Omega^p_{k_+}(X)$ suits and it is the Puiseux series that we have looked for.

Now assume that

$$\frac{\pi}{2}<\arg\left(-\frac{c^p_{k_+,1}}{c^p_{k,0}}\right)<\frac{3\pi}{2}.$$

We will show that the particular choice of θ (see (7.34) page 219) permits to find a Puiseux series with initial term $-c^p_{k,0}$ and with the same second term as that of $\Omega^p_{k_+}$ and which hence will be the series we have looked for.

Firstly, since $\theta\in\mathbf{Q}^n$ has been chosen so that for $j\in\Lambda_e$ $\langle\theta,\alpha_j\rangle$ is even, we know that $-c^p_{k,0}$ is also a root of $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$; so consider an other Puiseux branch that we will write

$$\Omega^p_{k_-}(X)=-c^p_{k,0}+c^p_{k_-,1}X^{\vartheta_{k_-,1}}+o\left(X^{\vartheta_{k_-,1}}\right)$$

whose initial term is this root $-c^p_{k,0}$.

Let us compare the two terms $c^p_{k_-,1}X^{\vartheta_{k_-,1}}$ and $c^p_{k_+,1}X^{\vartheta_{k_+,1}}$. We use for this the fact that the terms of lowest degree in X of $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(X, \Omega^p_{k_\pm}(X)\right)$ cancel each other; and these terms coincide with those of $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(X, \pm c^p_{k,0} + c^p_{k_\pm,1}X^{\frac{\vartheta_{k_\pm,1}}{q}}\right)$.

And these terms of lowest degree are also those of the following expression :

$$c^p_{\pm k,1}[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]'_e\left(\pm c^p_{k,0}\right)X^{\vartheta_{\pm k,1}} + X^{\langle\sigma^0,\alpha_{e'}\rangle}R^p_{e'}\left(\pm c^p_{k,0}\right). \tag{7.39}$$

So we have on one hand concerning the branch $\Omega^p_{k_+}$:

$$c^p_{k_+,1} = -\frac{R^p_{e'}(c^p_{k,0})}{[W^p_{s^0,\theta}]'_e(c^p_{k,0})}; \tag{7.40}$$

and on the other hand concerning the branch $\Omega^p_{k_-}$:

$$c^p_{k_-,1} = -\frac{R^p_{e'}(-c^p_{k,0})}{[W^p_{s^0,\theta}]'_e(-c^p_{k,0})} = -\frac{(-1)^{\langle\theta,\alpha_{e'}\rangle}R^p_{e'}(c^p_{k,0})}{-[W^p_{s^0,\theta}]'_e(c^p_{k,0})}. \tag{7.41}$$

And since $\langle\theta, \alpha_{e'}\rangle$ is an odd integer we obtain $c^p_{k_+,1} = c^p_{k_-,1}$.

Furthermore notice that each root $c^p_{k,0}$ and $-c^p_{k,0}$ provides a corresponding Puiseux series solution of $W_{s^0,\theta}(X,Y) = 0$ according to Proposition 9.

Hence finally there exists a Puiseux series

$$\Omega^p_k(X) = -c^p_{k,0} + c^p_{k_+,1}X^{\vartheta_{k_+,1}} + o\left(X^{\vartheta_{k_+,1}}\right)$$

which is such that $|\Omega^p_k(X)| < 1$ for $X > 0$ in a neighbourhood of 0.

This series provides zeroes

$$t_{m,p} = -\frac{\log\left(\Omega^p_k\left(p^{-1}\right)\right)}{\log(p)} + \frac{2\pi mi}{\log(p)};$$

where $m \in \mathbf{Z}$ and p is a prime number.

And we will have $t_{m,p} \in \Xi_{u,\eta}$ if $u < \Im(t_{m,p}) < u + \eta$; meaning that if :

$$u < \frac{2\pi m}{\log(p)} - \frac{\arg\left(\Omega_k\left(p^{-1}\right)\right)}{\log(p)} < u + \eta,$$

which is equivalent to :

$$\frac{u\log(p)}{2\pi} + \frac{\arg\left(\Omega_k\left(p^{-1}\right)\right)}{2\pi} < m < \frac{(u+\eta)\log(p)}{2\pi} + \frac{\arg\left(\Omega_k\left(p^{-1}\right)\right)}{2\pi}. \tag{7.42}$$

Hence we will have for p large enough some zeroes of $t \to W^p_{\mathbf{s^0},\theta}(p^{-1}, p^{-t})$ inside $\Xi_{u,\eta}$.

And there exists infinitely many zeroes $t_{m,p} \in \Xi_{u,\eta}$ of $\prod_{p\leq M_\delta} h(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n})$ when $\delta\to 0$; which completes the proof of this lemma.

$\square$

Let us prove now Lemma 28 :

Preuve (Lemma 28). Here we want to make profit of the freedom that we have in the choice of $\gamma^0\in\mathbf{R}^n$ so that $s^0\in\partial W(0)\cap\mathcal{B}$.

Let us take up again the expression of $c_{k,1}^p$ which has been obtained in (7.40) during the proof of Lemma 29 :

$$c_{k,1}^p = -\frac{R_{e'}^p(c_{k,0}^p)}{[W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p]_e'(c_{k,0}^p)}$$

Firstly let us check that the denominator $c_{k,0}^p[W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p]_e'\left(c_{k,0}^p\right)$ of $\frac{c_{k,1}^p}{c_{k,0}^p}$ does not depend neither on p nor on γ^0.

Indeed :

$$\begin{aligned} c_{k,0}^p[W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p]_e'\left(c_{k,0}^p\right) &= c_{k,0}p^{i\frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}}\sum_{j\in\Lambda_e} a_j\langle\theta,\alpha_j\rangle c_{k,0}^{\langle\theta,\alpha_j\rangle-1}p^{i\left(\frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}(\langle\theta,\alpha_j\rangle-1)-\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle\right)} \\ &= \sum_{j\in\Lambda_e} a_j\langle\theta,\alpha_j\rangle c_{k,0}^{\langle\theta,\alpha_j\rangle}, \end{aligned}$$

since $j\in\Lambda_e$ implies $\frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}\langle\theta,\alpha_j\rangle = \langle\gamma^0,\alpha_j\rangle$.

Now assume by absurd that for all $\gamma^0\in\mathbf{R}^n$ such that $\mathbf{s}^0\in\partial W(0)\cap\mathcal{B}$ there exists a prime number p such that

$$\arg\left(\frac{c_{k,1}^p}{c_{k,0}^p}\right) = \frac{\pi}{2} \mod (\pi),$$

Put for m such that $m\sim e'$:

$$\lambda_m := -\frac{a_m\; c_{k,0}^{\langle\theta,\alpha_m\rangle}}{\sum_{j\in\Lambda_e} a_j\langle\theta,\alpha_j\rangle c_{k,0}^{\langle\theta,\alpha_j\rangle}} \in \mathbf{C}$$

depending neither on p nor on γ^0.

Then we have :

$$\begin{aligned}\frac{c^p_{k,1}}{c^p_{k,0}} &= \sum_{\{m:\alpha_m-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e\}} \lambda_m p^{i\left(\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle\frac{\langle\theta,\alpha_m\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}-\langle\gamma^0,\alpha_m\rangle\right)} \\ &= \sum_{\{m:\alpha_m-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e\}} \lambda_m p^{i\langle\gamma^0,w_m\rangle},\end{aligned}$$

if we write

$$w_m := \frac{\langle\theta,\alpha_m\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}\alpha_e - \alpha_m.$$

Remark that these w_m are all equal. Indeed if m, m' are such that $\alpha_m-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e$ and $\alpha_{m'}-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e$, then $\alpha_m-\alpha_{m'}\in\mathbf{Q}\alpha_e$ and consequently there exists $q\in\mathbf{Q}$ such that :

$$\alpha_m-\alpha_{m'} = q\alpha_e.$$

But then

$$\frac{\langle\theta,\alpha_m-\alpha_{m'}\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}\alpha_e = q\alpha_e = \alpha_m-\alpha_{m'};$$

and hence $w_m = w_{m'}$.

Finally we have :

$$\frac{c^p_{k,1}}{c^p_{k,0}} = p^{i\langle\gamma^0,w_{e'}\rangle}\sum_{m|\alpha_m-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e}\lambda_m.$$

Now if we put

$$\varphi := \arg\left(\sum_{m|\alpha_m-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e}\lambda_m\right);$$

(φ depending neither on p nor on γ^0), then we obtain that for all $\gamma^0\in\mathbf{R}^n$ so that $\mathbf{s}^0\in\partial W(0)\cap\mathcal{B}$ there exists a prime number :

$$\langle\gamma^0,w_{e'}\rangle\log(p)+\varphi \mod (2\pi)\in\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}.$$

But the set

$$M := \bigcup_p\bigcup_{u\in\mathbf{Z}}\left\{\gamma^0\in\mathbf{R}^n : \langle\gamma^0,w_{e'}\rangle\log(p)+\varphi = \frac{\pi}{2}+u\pi\right\}.$$

is a set of empty interior according to Baire Theorem since it is a countable union of sets of empty interior.

Consequently these previous conditions cannot be satisfied for all γ^0 include inside an open ball of $\mathbf{R}^n$; hence we obtain a contradiction to the hypothesis enunciated above, which completes the proof of this lemma.

$\square$

At this stage, we have found an infinite number of zeroes $t_{m,p}$ of $t \longmapsto W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(p^{-1},p^{-t})$ which accumulate inside $\Xi_{u,\eta}$.

From now on we will not assume anymore that $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$ is a cyclotomic polynomial.

To prove Theorem 29, it is necessary to ensure that these zeroes are not cancelled by possible poles coming from the factor A_{M_δ} which are on the form :

$$t(\beta,\rho)=\frac{\rho-\sum_{j=1}^r \beta_j\langle \mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle};$$

where $\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}$ and ρ is the pole 1 or a non-trivial zero of the Riemann zeta function.

We will distinguish two cases : the case where $\beta\notin B_e$ and the other one where $\beta\in B_e$ (see Definition 37).

For the first, we will show (Lemma 30) that for all $\beta\notin B_e$ and for all zero or pole ρ of $\zeta(s)$, for p large enough ($p>p_0$ where p_0 is an absolute constant)

$$h\left(p^{-s_1^0-t(\beta,\rho)\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t(\beta,\rho)\theta_n}\right)\neq 0.$$

And for this we will see that after having previously exploited the freedom that we have in the choice of θ and of γ^0, here it will be necessary in addition to move the real part σ^0 of $\mathbf{s}^0$.

Concering the second case, we will prove (Lemma 31) a weaker property : it is possible (notably when $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}$ admits a root in Y independently of X of modulus strictly less than 1) that some $t(\beta,\rho)$ ($\beta\in B_e$) vanish $t\longmapsto h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n}\right)$; but we will see that they are far fewer numerous than the $t_{m,p}$ previously considered.

So let $\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}$, ρ such that $\zeta(\rho)=0$ (or $\rho=1$ is the pole of $\zeta(s)$) and p a prime number.

We write :

$$\begin{aligned}
h\left(p^{-s_1^0-t(\beta,\rho)\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t(\beta,\rho)\theta_n}\right) &= 1+\sum_{k=1}^r a_k p^{-\langle \mathbf{s}^0,\alpha_k\rangle-\langle\theta,\alpha_k\rangle\left(\frac{\rho-\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}\right)}\\
&= 1+\sum_{k=1}^r a_k p^{\lambda_k(\sigma^0)}
\end{aligned}$$

where

$$\lambda_k(\sigma^0)=\lambda_{\theta,\beta,k}(\sigma^0)=-u_k(\sigma^0)-v_k;$$

with

$$u_k(\sigma^0)=u_{\theta,\beta,k}(\sigma^0)=\langle\sigma^0,\alpha_k\rangle-\langle\theta,\alpha_k\rangle\frac{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}$$

and

$$v_k = v_{\theta,\beta,k} = \langle \theta, \alpha_k \rangle \left(\frac{\rho - i \sum_{j=1}^r \beta_j \langle \gamma^0, \alpha_j \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle} \right) + i \langle \gamma^0, \alpha_k \rangle;$$

not depending on σ^0.

Define the equivalence relation $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\beta$ on the α_k :

$$\alpha_k \ \mathcal{R} \ \alpha_{k'} \iff \begin{array}{l} \text{for all } \sigma^0 \text{ such that } \mathbf{s}^0 \in \partial W(0) \cap \mathcal{B} \\ u_k(\sigma^0) = u_{k'}(\sigma^0). \end{array}$$

We write the equivalence class of α_{k_0} $[k_0]$. We assign $\mathcal{V}$ to be a set whose elements are a representative of each equivalence class.

we check without difficulty according to (7.13) that we have :

$$\alpha_k \ \mathcal{R} \ \alpha_{k'} \iff \begin{array}{l} \text{there exists } \lambda_{\beta,k,k'} \text{ and } \mu_{\beta,k,k'} \in \mathbf{Q} \text{ such that} \\ \alpha_k - \alpha_{k'} = \lambda_{\beta,k,k'} \displaystyle\sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j + \mu_{\beta,k,k'} \alpha_e. \end{array}$$

Remarque 28. When $\beta \in B_e$, $u_k(\sigma^0)$ is reduced to :

$$u_k(\sigma^0) = \langle \sigma^0, \alpha_k \rangle.$$

Hence we have $\alpha_k \ \mathcal{R} \ \alpha_{k'}$ if and only if $\alpha_k - \alpha_{k'} \in \mathbf{Q}\alpha_e$ according to the condition (7.13) of genericity on σ^0.

Now consider $\sigma^0 \longmapsto h\left(p^{-s_1^0 - t(\beta,\rho)\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t(\beta,\rho)\theta_n}\right)$ as a function written $f_{p,\rho,\beta}(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$ depending of $(n-1)$ variables $\widetilde{\sigma}^0 = (\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$ by putting :

$$\begin{cases} \sigma_\ell^0 = \widetilde{\sigma}_\ell^0 & (l \in \{1, \ldots, n-1\}), \\ \sigma_n^0 = -\dfrac{1}{\alpha_e^n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_e^i \widetilde{\sigma}_i^0 & . \end{cases}$$

Moreover write $\widetilde{\alpha_j} \in \mathbf{Z}^{n-1}$ for $j \in \{1, \ldots, r\}$ with $\widetilde{\alpha_j^\ell} = \alpha_j^\ell - \frac{\alpha_j^n}{\alpha_e^n} \alpha_e^\ell$ for $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ such that we have for all $j \in \{1, \ldots, r\}$:

$$\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle = \langle \widetilde{\sigma}^0, \widetilde{\alpha}_j \rangle.$$

So if we put for $k \in \{1, \ldots, r\}$:

$$\widetilde{u}_k(\widetilde{\sigma}^0) := \langle \widetilde{\sigma}^0, \widetilde{\alpha}_j \rangle - \langle \theta, \alpha_k \rangle \frac{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \widetilde{\sigma}^0, \widetilde{\alpha}_j \rangle}{\sum_{j=1}^r \langle \theta, \alpha_j \rangle}$$

which is a linear form in $\widetilde{\sigma}^0$,

we obtain :

$$f_{p,\rho,\beta}\left(\widetilde{\sigma}_1^0,\ldots,\widetilde{\sigma}_{n-1}^0\right)=1+\sum_{k_0\in\mathcal{V}}\left(\sum_{\alpha_k\in[k_0]}a_kp^{-v_k}\right)p^{-\widetilde{u}_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)} \tag{7.43}$$

where $\widetilde{u}_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)$ are here two at a time distinct.

Lemme 30. *Moving σ^0 if necessary so that $\boldsymbol{s}^0\in\partial W(0)\cap\mathcal{B}$, there exists p_0 such that for all $\beta\notin B_e$, for all ρ such that $\Re(t(\beta,\rho))>0$ and for all prime number $p>p_0$:*

$$h\left(p^{-s_1^0-t(\beta,\rho)\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t(\beta,\rho)\theta_n}\right)\neq 0.$$

Preuve. The idea of the proof is to reduce the problem to the following assertion :

there exists $k_0\in\mathcal{V}$ such that we have $\displaystyle\sum_{\alpha_k\in[k_0]}a_kp^{-v_k}\neq 0$ for p large enough (i.e. $p>p_0$, where p_0 is independent of $\beta\notin B_e$ and ρ such that $\Re t(\beta,\rho)>0$).

The reason why this is helpful is that it will then be easy to show that

$$f_{p,\rho,\beta}\neq 0\quad p>p_0.$$

Write for all $k\in\{1,\ldots,r\}$:

$$\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}:=\alpha_k-\frac{\langle\theta,\alpha_k\rangle}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}\sum_{j=1}^r\beta_j\alpha_j\text{ et }\mathcal{A}_{2,\beta,\theta,\rho,k}:=\frac{\langle\theta,\alpha_k\rangle\rho}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}.$$

Write also $[k_0]'$ a set of representatives of $\alpha_k\in[k_0]$ with the $\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}$ two at a time distinct.

Let p be a prime number.

Then we easily check that

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha_k\in[k_0]}a_kp^{-v_k} &= \sum_{\alpha_k\in[k_0]}a_kp^{-\mathcal{A}_{2,\beta,\theta,\rho,k}-i\ \langle\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k},\gamma^0\rangle}\\ &= \sum_{\alpha_k\in[k_0]'}\left(\sum_{\alpha_{k'}\in[k_0];\ \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'}=\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}}a_{k'}p^{w_{k,k',\theta,\beta,\rho}}\right)p^{-\mathcal{A}_{2,\beta,\theta,\rho,k}}p^{-i\ \langle\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k},\gamma^0\rangle};\end{aligned} \tag{7.44}$$

where

$$w_{k,k',\theta,\beta,\rho}=\frac{\langle\theta,\alpha_k-\alpha_{k'}\rangle}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}\rho.$$

Assume in a first time that there exists $\alpha_k \in [k_0]'$ such that

$$\sum_{\alpha_{k'} \in [k_0];\ \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'} = \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}} a_{k'} p^{w_{k,k',\theta,\beta,\rho}} \neq 0.$$

We fix a suitable $\phi \in \mathbf{R}^n$ so that $\langle \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}, \phi \rangle$ (for $\alpha_k \in [k_0]'$) are two at a time distinct and we put $\gamma^0 := x.\phi$ in a way to consider (7.44) as an expression depending on the real variable x (in this way we move generically γ^0).

Now, if by absurd $\sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k} = 0$ (i.e. if the expression (7.44) is identically zero in x), we would obtain by derivating $\#[k_0]'$ times with respect to x that the Vandermonde matrix associated to the powers $(i\langle \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}, \phi \rangle \log(p))^{\nu}$ (for $k \in [k_0]'$ and $\nu = 0, 1, \ldots, \#[k_0]'$) would have a non-trivial kernel.

Precisely, consider the Vandermonde matrix $M = (a_{\alpha_k,j})_{\substack{\alpha_k \in [k_0]' \\ 1 \leq j \leq \#[k_0]'}}$ where

$$a_{\alpha_k,j} := (i\langle \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}, \phi \rangle \log(p))^{j}.$$

If we put :

$$V = \left(V_{k_1}, \ldots, V_{k_{\#[k_0]'}}\right) \text{ where :}$$

$$\forall k_i \in [k_0]', V_{k_i} := p^{-\mathcal{A}_{2,\beta,\theta,\rho,k_i} - ix\langle \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k_i}, \phi \rangle} \sum_{\alpha_{k'} \in [k_0]; \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'} = \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k_i}} a_{k'} p^{w_{k_i,k',\theta,\beta,\rho}};$$

we would have :

$$M \cdot V = \mathbf{0}.$$

And if there exists $k \in [k_0]$ such that $\displaystyle\sum_{\alpha_{k'} \in [k_0]; \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'} = \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}} a_{k'} p^{w_{k,k',\theta,\beta,\rho}} \neq 0$, then we also would have that $p^{-\mathcal{A}_{2,\beta,\theta,k} - ix\langle \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}, \phi \rangle} \displaystyle\sum_{\alpha_{k'} \in [k_0]; \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'} = \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}} a_{k'} p^{w_{k,k',\theta,\beta,\rho}} \neq 0$ and consequently V is non-zero and the kernel of M (which is a Vandermonde matrix of determinant non-zero since the $\langle \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}, \phi \rangle$ are two at a time distinct) would be non-trivial; which is impossible.

Consequently, the p such that $\sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k} = 0$ are necessarily those which satisfy :

$$\sum_{\alpha_{k'} \in [k_0];\ \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'} = \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}} a_{k'} p^{w_{k,k',\theta,\beta,\rho}} = 0 \tag{7.45}$$

for all $\alpha_k \in [k_0]'$.

Notice also that if $\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'} = \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}$ then

$$\alpha_k - \alpha_{k'} = \frac{\langle \theta, \alpha_k - \alpha_{k'} \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle} \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j;$$

and by taking the inner product with σ^0 we obtain :

$$\langle \sigma^0, \alpha_k - \alpha_{k'} \rangle = \frac{\langle \theta, \alpha_k - \alpha_{k'} \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle} \sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle.$$

So we have since $\sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \neq 0$ (because $\beta \notin B_e$) :

$$w_{k,k',\theta,\beta,\rho} = \rho \frac{\langle \sigma^0, \alpha_k - \alpha_{k'} \rangle}{\sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle}. \tag{7.46}$$

It is important to remark that although the set of $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ such that $\gamma(\beta) \neq 0$ is infinite, the set

$$E := \{\beta_j \mid j \notin \Lambda_e, \gamma(\beta) \neq 0, \Re(t(\beta, \rho)) \geq 0\} \tag{7.47}$$

is finite.

Indeed, since the $t(\beta, \rho)$ which could cancel the zeroes $t_{m,p}$ are necessarily of positive real part, we have

$$\Re(t(\beta, \rho)) = \frac{\Re(\rho) - \sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle} \geq 0; \tag{7.48}$$

and consequently

$$\sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \leq \Re(\rho) < 1;$$

which gives that (7.47) is a finite set since for all $j \notin \Lambda_e$, $\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle > 0$.

Now if p is a prime number satisfying (7.45), then $p^{\overline{\frac{\rho}{\sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle}}}$ is a solution of

$$\sum_{\alpha_{k'} \in [k_0];\ \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'} = \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}} a_{k'} X^{\langle \sigma^0, \alpha_k - \alpha_{k'} \rangle} = 0. \tag{7.49}$$

It is clear that these equations, in finite number, don't have any solution for $|X|$ large enough ($|X| > M(\sigma^0)$) since the $\langle \sigma^0, \alpha'_k \rangle$ ($\alpha_{k'} \in [k_0]$; $\mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'} = \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k}$) are two at a time distinct.

Indeed, if $\langle \sigma^0, \alpha_{k'} \rangle = \langle \sigma^0, \alpha_{k''} \rangle$ we would have

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'} = \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k''} \\ \mathcal{A}_{2,\beta,\theta,k'} = \mathcal{A}_{2,\beta,\theta,k''} \text{ since } w_{k,k',\theta,\beta,\rho} = w_{k,k'',\theta,\beta,\rho} \text{ according to (7.46).} \end{cases}$$

Thus

$$\rho\ \alpha_{k'} = \rho\ \mathcal{A}_{1,\beta,\theta,k'} + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \alpha_j\ \mathcal{A}_{2,\beta,\theta,k'} = \rho\ \alpha_{k''};$$

and hence $\alpha_{k'} = \alpha_{k''}$.

In addition, the previous constant $M(\sigma^0)$ (which a priori depends on σ^0) really depends only on the compact $\mathcal{K}$ where σ^0 is situated since all the $\langle \sigma^0, \alpha_k - \alpha_{k'} \rangle$ are bounded inside $\mathcal{K}$ and it is possible to choose $M = M(\mathcal{K})$ so that (7.49) don't have any solution for $|X| > M(\mathcal{K})$.

Furthermore, we have a minoration for $\Re(\rho)$.

Indeed since $\Re(t(\beta, \rho)) \geq 0$, we have according to (7.48)

$$\Re(\rho) > \min_{j \notin \Lambda_e} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle > 0.$$

Remark also the fact that this minoration is absolute (i.e. does not depend on σ^0) since although we move σ^0, it always lies inside the compact $\mathcal{K}$.

Thus there exists an absolute constant p_0 such that for $p > p_0 = p_0(\mathcal{K})$:

$$\left| p^{\overline{\sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle}^{\rho}} \right| \geq \exp\left(\log(p) \frac{\min_{j \notin \Lambda_e} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle}{\max_{\beta_j \in E} \beta_j \sum_{j \notin \Lambda_e} \langle \theta, \alpha_j \rangle} \right) > M(\mathcal{K}).$$

Hence if $p > p_0$

$$A_{k_0}(p) := \sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k} \neq 0.$$

Now show that $f_{p,\rho,\beta}\left(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0\right)$ is non-zero for $p > p_0$.

For this it suffices to consider $\mu \in \mathbf{R}^{n-1}$, for example with components $\mathbf{Q}$-linearly independent, in such a way that $\widetilde{u}_{k_0}(\mu)$ are two at a time distinct for $k_0 \in \mathcal{V}$.

Thus we put :

$$\widetilde{\sigma}^0 = t\mu.$$

Then since $\widetilde{u}_{k_0}(t\mu) = t\ \widetilde{u}_{k_0}(\mu)$ we have :

$$f_{p,\rho,\beta}(t\mu) = 1 + \sum_{k_0 \in \mathcal{V}} A_{k_0}(p) \exp\left(-t \log(p) \widetilde{u}_{k_0}(\mu)\right).$$

Now using the fact that the functions $\{t \longmapsto \exp\left(-t \log(p) \widetilde{u}_{k_0}(\mu)\right)\}_{k_0 \in \mathcal{V}}$ are linearly independent since the $\widetilde{u}_{k_0}(\mu) \in \mathbf{R}$ are two at a time distinct, it is clear that $f_{p,\rho,\beta}(t\mu)$ is non-zero, and hence that $f_{p,\rho,\beta}\left(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0\right)$ is non-zero too for $p > p_0$.

Then we use Lemma 26 to deduce that for all $p > p_0$, ρ and $\beta \notin B_e$ fixed, the zeroes of $\widetilde{\sigma}^0 \longmapsto f_{p,\rho,\beta}(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$ are given by a finite union of hypersurfaces of dimension at most $n-2$; and are consequently of empty interior inside $\mathbf{R}^{n-1}$.

Then let :

$$M = \bigcup_{\beta \notin B_e, p > p_0, \rho | \zeta(\rho) = 0} f_{p,\rho,\beta}^{-1}(0).$$

M, being a countable union of closed sets of empty interior inside $\partial W(0) \cap \mathcal{B} \cap \mathbf{R}^n$, is also of empty interior inside $\partial W(0) \cap \mathcal{B} \cap \mathbf{R}^n$ according to Baire's theorem.

To conclude it suffices to choose $\mathbf{s}^0 \in \partial W(0) \cap \mathcal{B}$ such that $\sigma^0 \in \partial W(0) \cap \mathcal{B} \cap \mathbf{R}^n \setminus M$ to have an accumulation of zeros or poles of $Z(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ inside $\Xi_{u,\eta}$, which completes the proof of this lemma.

□

To summarize, we have seen in the proof of Lemma 30, that when $\beta \notin B_e$ there exists at least one $k_0 \in \mathcal{V}$ such that $\sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k} \neq 0$, which permits to have $f_{p,\rho,\beta}\left(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0\right) \neq 0$ moving σ^0 if necessary by avoiding a countable number of hypersurfaces of dimension at most $n-2$.

Now let us take a look at $t(\beta, \rho)$ with $\beta \in B_e$.

Consider for all $1 > \delta > 0$ the region $\Xi_{u,\eta}^\delta$ determined by :

$$\Xi_{u,\eta}^\delta : \begin{array}{l} \Re(t) > \delta \\ 0 < u < \Im(t) < u + \eta. \end{array}$$

Let us enunciate the last lemma to complete the proof of Theorem 29 :

Lemme 31. *Moving σ^0 so that $s^0 \in \partial W(0) \cap \mathcal{B}$ if necessary, there are inside $\Xi_{u,\eta}^\delta$ (as $\delta \longrightarrow 0$) some zeroes $t_{m,p}$ coming from $W_{s^0,\theta}^p(p^{-1}, p^{-t})$ which are not poles of the ζ-factors of A_{M_δ} corresponding to the $\beta \in B_e$.*

In particular there exists a infinite number of zeroes of $Z(\boldsymbol{s}^0 + t\theta)$ inside $\Xi_{u,\eta}$ which are not cancelled.

Preuve. Take up again the writing (7.43) of $f_{p,\rho,\beta}$:

$$f_{p,\rho,\beta}\left(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0\right) = 1 + \sum_{k_0 \in \mathcal{V}} \left(\sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k} \right) p^{-\widetilde{u}_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)}$$

where $\widetilde{u}_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)$ are here two at a time distinct.

If there exists one $k_0 \in \mathcal{V}$ such that $\sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k} \neq 0$, we proceed exactly as in Lemma 30 to have $f_{p,\rho,\beta}\left(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0\right) \neq 0$ moving σ^0 if necessary.

So assume that for all $k_0 \in \mathcal{V}$ $\sum_{\alpha_k\in[k_0]} a_k p^{-v_k} = 0$.

According to Remark 28, we can precisely describe $\sum_{\alpha_k\in[k_0]} a_k p^{-v_k}$:

$$\sum_{\alpha_k\in[k_0]} a_k p^{-v_k} = \sum_{\alpha_k|\alpha_k-\alpha_{k_0}\in\mathbf{Q}\alpha_e} a_k p^{-\frac{\langle\theta,\alpha_k\rangle\rho}{\sum_{j\in\Lambda_e}\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}-i\left(\langle\gamma^0,\alpha_k\rangle-\langle\theta,\alpha_k\rangle\frac{\sum_{j\in\Lambda_e}\beta_j\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle}{\sum_{j\in\Lambda_e}\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}\right)}.$$

By writing for $j \in \Lambda_e$ $\alpha_j = q_j\alpha_e$ ($q_j \in \mathbf{Q}$), we have

$$\langle\gamma^0,\alpha_k\rangle - \langle\theta,\alpha_k\rangle\frac{\sum_{j\in\Lambda_e}\beta_j\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle}{\sum_{j\in\Lambda_e}\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle} = \langle\gamma^0,\alpha_k\rangle - \langle\theta,\alpha_k\rangle\frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}.$$

And consequently for all $k_0 \in \mathcal{V}$ $\sum_{\alpha_k\in[k_0]} a_k p^{-v_k} = 0$ is equivalent to :

$$\sum_{\alpha_k|\alpha_k-\alpha_{k_0}\in\mathbf{Q}\alpha_e} a_k p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_k\rangle} p^{-\langle\theta,\alpha_k\rangle\left(\frac{\rho}{\sum_{j\in\Lambda_e}\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}-i\frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}\right)} = 0;$$

which implies that $p^{-\frac{\rho}{\sum_{j\in\Lambda_e}\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}+i\frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}}$ is a root of the generalized polynomials

$$\sum_{\alpha_k|\alpha_k-\alpha_{k_0}\in\mathbf{Q}\alpha_e} a_k p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_k\rangle} Y^{\langle\theta,\alpha_k\rangle}$$

for all $k_0 \in \mathcal{V}$.

And since

$$\begin{aligned} W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y) &= \sum_{k_0\in\mathcal{V}} \sum_{\alpha_k|\alpha_k-\alpha_{k_0}\in\mathbf{Q}\alpha_e} a_k p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_k\rangle} X^{\langle\sigma^0,\alpha_k\rangle} Y^{\langle\theta,\alpha_k\rangle} \\ &= \sum_{k_0\in\mathcal{V}} X^{\langle\sigma^0,\alpha_{k_0}\rangle} \sum_{\alpha_k|\alpha_k-\alpha_{k_0}\in\mathbf{Q}\alpha_e} a_k p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_k\rangle} Y^{\langle\theta,\alpha_k\rangle}; \end{aligned}$$

then we obtain that $p^{-\frac{\rho}{\sum_{j\in\Lambda_e}\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}+i\frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}}$ is a root of $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ for all X.
In addition this root is of modulus stricly less than 1.
Indeed

$$\left|p^{-\frac{\rho}{\sum_{j\in\Lambda_e}\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}+i\frac{\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle}{\langle\theta,\alpha_e\rangle}}\right| = \exp\left(-\frac{\Re(\rho)}{\sum_{j\in\Lambda_e}\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}\log(p)\right) < 1$$

because $\Re(\rho) > 0$.

By taking up the previous notations, we obtain that there exists a Puiseux branch reduced to one term (i.e. a root) $\Omega_k^p = c_{k,0}^p$ of modulus stricly less than 1 (which does not depend on p according to (7.31)) satisfying $W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p(X, \Omega_k^p) = 0$.

Now we are going to prove that this branch provides a lot of zeroes of $W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p(p^{-1}, p^{-t})$ inside $\Xi_{u,\eta}^\delta$, many more than the possible poles coming from A_{M_δ} when $\delta \longrightarrow 0$, so as to ensure the accumulation of zeroes of $Z(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ inside $\Xi_{u,\eta}$.

The zeroes $t_{m,p}$ produced by Ω_k^p (of positive real part) are of the form

$$t_{m,p} = -\frac{\log(c_{k,0}^p)}{\log(p)} + \frac{2i\pi m}{\log(p)};$$

where $m \in \mathbf{Z}$ and p is a prime number.

The $t_{m,p} \in \Xi_{u,\eta}^\delta$ are such that $\Re(t_{m,p}) > \delta$ and $u < \Im(t_{m,p}) < u + \eta$, meaning such that :

$$p < \exp\left(-\frac{\log|c_{k,0}^p|}{\delta}\right) \text{ and } \frac{u\log(p)}{2\pi} + \arg(c_{k,0}^p) < m < \frac{(u+\eta)\log(p)}{2\pi} + \arg(c_{k,0}^p).$$

Furthermore these $t_{m,p}$ are two at a time distinct. Indeed if $t_{m,p} = t_{m',p'}$ we obtain by taking the real parts :

$$-\frac{\log|c_{k,0}^p|}{\log(p)} = -\frac{\log|c_{k,0}^{p'}|}{\log(p')};$$

and since $|c_{k,0}^p| = |c_{k,0}^{p'}|$ (see (7.31)), we obtain $\log(p) = \log(p')$ and hence $p = p'$. And by comparing the imaginary parts we conclude that $m = m'$.

Consequently the number of such $t_{m,p}$ (counted without the multiplicities) inside $\Xi_{u,\eta}^\delta$ is given by

$$N_{\Omega_k^p} = \sum_{p < \exp\left(-\frac{\log|c_{k,0}^p|}{\delta}\right)} \left(\frac{\eta\log(p)}{2\pi} + \xi\right)$$

where $|\xi| \leq 1$.

And by using the prime number theorem

$$\sum_{p \leq x} \log(p) \sim x \quad (x \longrightarrow \infty)$$

$$\sum_{p \leq x} \xi = O(\pi(x)) = o(x) \quad (x \longrightarrow \infty);$$

we obtain :

$$N_{\Omega_k^p} \sim \frac{\eta}{2\pi} \exp\left(-\frac{\log|c_{k,0}|}{\delta}\right) \quad (\delta \longrightarrow 0).$$

Let us estimate on the other hand the number of possible poles (counted without the multiplicities) coming from A_{M_δ}.

If t_0 is a zero or a singularity of $A_{M_\delta}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ inside $\Xi^\delta_{u,\eta}$, then there exists $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ such that $\sum_{j=1}^r \beta_j \left(\langle \mathbf{s}^0, \alpha_j\rangle + t_0\langle\theta, \alpha_j\rangle\right)$ is a zero or a pole of $\zeta(\cdot)$; and this quantity satisfies necessarily :

$$\Re(t_0) \sum_{j=1}^r \beta_j \langle\theta, \alpha_j\rangle \leq \Re\left(\sum_{j=1}^r \beta_j \left(\langle \mathbf{s}^0, \alpha_j\rangle + t_0\langle\theta, \alpha_j\rangle\right)\right) \leq 1;$$

And so :

$$\delta < \Re(t_0) \leq \frac{1}{\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\theta, \alpha_j\rangle};$$

which gives :

$$\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\theta, \alpha_j\rangle < \frac{1}{\delta}.$$

But since $\langle\theta, \alpha_j\rangle > 0$ for all j there exists a constant $C_\theta > 0$ (depending only on θ) such that

$$\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\theta, \alpha_j\rangle \geq C_\theta\ \|\beta\|.$$

Hence :

$$\|\beta\| \leq \frac{1}{C_\theta}\ \frac{1}{\delta}. \tag{7.50}$$

In addition,

$$\Im(t_0) < u + \eta$$

gives :

$$\Im\left(\sum_{j=1}^r \beta_j \left(\langle \mathbf{s}^0, \alpha_j\rangle + t_0\langle\theta, \alpha_j\rangle\right)\right) = O\left(\frac{u+\eta}{\delta}\right).$$

Having fixed $\eta > 0$, the number of zeros or singularities of a ζ-factor of $A_{M_\delta}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ is given by :

$$O\left(\frac{1}{\delta}\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right),$$

with regard to a classical result concerning the estimation of the number of nontrivial zeros of the Riemann zeta function having the imaginary part less than $\frac{1}{\delta}$. Moreover, the same zero or singularity can, according to (7.50), appear in at most $\left(\frac{1}{\delta}\right)^r$ terms; which gives at most :

$$O\left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^{r+1}\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)$$

zeros or singularities coming from $A_{M_\delta}\left(\mathbf{s}^0+t\theta\right)$ inside $\Xi^{\delta}_{u,\eta}$ (counted without their multiplicities).

Hence this estimation is negligible regardless to $N_{\Omega_k^p}$, which achieves the proof of this lemma and completes the proof of the main theorem 29.

□

Remarque 29. We have just seen that we can suppose, moving σ^0 if necassary, that for all $\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}$ and for all zero or pole ρ of ζ

$$h\left(p^{-s_1^0-t(\beta,\rho)\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t(\beta,\rho)\theta_n}\right)\neq 0,$$

except if there exists eventually a root in Y for all X of $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ of modulus strictly less than 1.

Then it means that there exists a one variable polynomial in Y which divides $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$. And by reusing the arguments presented in Lemma 27, that leads to that a certain polynomial divides h.

So if h is an irreducible polynomial, any $t(\beta,\rho)$ ($\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}$) vanishes $t\longmapsto h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n}\right)$ moving σ^0 if necessary.

7.5 Study on the possibility of a continuation of dimension strictly inferior beyond $\partial W(0)$ and application to the conjecture of Rudnick and du Sautoy.

Let us start this section with the following example coming from N. Kurokawa [20] :

Put

$$h(X_1,X_2,X_3)=1-X_1X_2-X_2X_3-X_3X_1+2X_1X_2X_3;$$

and the corresponding Euler product :

$$Z(s_1,s_2,s_3)=\prod_p\left(1-p^{-s_1-s_2}-p^{-s_2-s_3}-p^{-s_3-s_1}+2p^{-s_1-s_2-s_3}\right).$$

Here we have :

$$W(0)=\{(s_1,s_2,s_3)\in \mathbf{C}^3 \mid \sigma_1+\sigma_2>0, \sigma_2+\sigma_3>0, \sigma_3+\sigma_1>0\}.$$

The polynomial h is not cyclotomic ; indeed we have :

$$h(X_1,X_1,X_1)=(1+X_1)^2(1-2X_1);$$

and $(1-2X_1)$ is clearly not cyclotomic.

According to the previous results, we know that Z continues to $W(0)$ and that there does not exist any meromorphic continuation to an open ball of complex dimension 3 beyond any point of $\partial W(0)$.

However,

$$Z(s_1,s_2,0)=\prod_p \left(1-p^{-s_1}\right)\left(1-p^{-s_2}\right)=\frac{1}{\zeta(s_1)\zeta(s_2)};$$

$Z(s_1,s_2,0)$ is hence meromorphic on $\mathbf{C}^2$: here there is a continuation on a complex hypersurface beyond the point $\mathbf{0}\in\partial W(0)$. This example shows that Theorem 29 is optimal from the point of view of the complex dimension of a possible meromorphic extension beyond $\partial W(0)$.

7.5.1 On the meromorphy of $Z(\mathbf{s})$ on the edge $\partial W(0)$.

We want to precise in some cases the behaviour of $Z(\mathbf{s})$ (of course when h is not cyclotomic) on the boundary $\partial W(0)$.

Here we consider $\mathbf{s}^0\in\partial W(0)\cap\mathbf{R}^n$ satisfying the condition $(C.13)$.

Définition 42. Given $a\in\mathbf{R}$ and $\mathcal{P}\subseteq\mathbf{C}$, we write :

$$\Re(t)>_{\mathcal{P}} a=\{t\in\mathbf{C}\mid \Re(t)>a\}\setminus\bigcup_{\rho\in\mathcal{P}}(\rho+]-\infty,0]);$$

the half-plan $\Re(t)>a$ deprived of a system of horizontal half-lines on the left determined by the points of $\mathcal{P}$.

If $m\geq 1$ and if J is a finite subset of $\mathbf{N}^*$, we also put :

$$\begin{aligned}\partial_J(m) \quad &= \quad \left\{t\in\mathbf{C}\mid\Re(t)>-1,\text{there exists } \beta\in\mathbf{N}^{\#J}, \|\beta\|=m, \zeta\left(\sum_{j\in J}\beta_j\langle\mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle(1+t)\right)=0\right\}\\ &\bigcup_{\beta\in\mathbf{N}^{\#J},\|\beta\|=m}\left\{-1+\frac{1}{\sum_{j\in J}\beta_j\langle\mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle}\right\}.\end{aligned}$$

Remarque 30. The reader could consult [28] (chapter 4 p. 131) where it is proved that the set $\Re(t) >_{\mathcal{P}} a$ is a simply connected open set if the following conditions hold :

1. The imaginary parts of the elements of $\mathcal{P}$ do not admit accumulation point on the real axis ;
2. The real parts of the elements of $\mathcal{P}$ are upper bounded.

The aim of this section is to prove the following result :

Théorème 30. *Suppose that*

$$[h]_e(\boldsymbol{X}) = 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j \boldsymbol{X}^{\alpha_j}$$

is cyclotomic and satisfies $[h]_e(\boldsymbol{1}) \neq 0$.

Let $J_0 = \{1, \ldots, r\} \setminus \Lambda_e$ *and write :*

$$\partial_{J_0} = \bigcup_{m\geq 1} \partial_{J_0}(m).$$

Then $t \longmapsto Z(\boldsymbol{s}^0(1+t))$ *admits a meromorphic continuation to* $\Re(t) >_{\partial_{J_0}} -1$. *In particular,* $t \longmapsto Z(\boldsymbol{s}^0(1+t))$ *continues to an open ball beyond almost every point of the axis* $\Re(t) = 0$ *(meaning all points except a countable and isolated set).*

Preuve. Write :

$$h(\mathbf{X}) = [h]_e(\mathbf{X}) \left(1 + \frac{\sum_{j\in J_0} a_j \mathbf{X}^{\alpha_j}}{[h]_e(\mathbf{X})}\right).$$

As $[h]_e(\mathbf{X})$ is cyclotomic, the domain of meromorphy of the Euler product :

$$Z(\mathbf{s}) = \prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n})$$

remains unchanged if we consider :

$$\widetilde{Z}(\mathbf{s}) = \prod_p \left(1 + \frac{\sum_{j\in J_0} a_j p^{-\langle \mathbf{s}, \alpha_j\rangle}}{[h]_e(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n})}\right).$$

Notice that for all prime number p :

$$[h]_e(p^{-s_1^0(1+t)}, \ldots, p^{-s_n^0(1+t)}) = 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j p^{-\langle \mathbf{s}^0, \alpha_j\rangle(1+t)} = [h]_e(\mathbf{1});$$

and hence it does not depend on p.

So we have :

$$\widetilde{Z}(\mathbf{s}^0(1+t)) = \prod_p \left(1 + \sum_{j \in J_0} \frac{a_j}{[h]_e(\mathbf{1})} p^{-\langle \mathbf{s}^0, \alpha_j \rangle (1+t)}\right). \tag{7.51}$$

Now let $\delta > 0$ and m_δ the integer such that for all $\beta \in \mathbf{N}^{\# J_0}$ satisfying $\|\beta\| \geq m_\delta$ we have $\sum_{j \in J_0} \beta_j \langle \mathbf{s}^0, \alpha_j \rangle > \frac{1}{\delta}$, and then write :

$$\partial_{J_0}^\delta = \bigcup_{m=1}^{m_\delta} \partial_{J_0}(m).$$

Let us show that $t \longmapsto \widetilde{Z}(\mathbf{s}^0(1+t))$ continues meromorphically to $\Re(t) >_{\partial_{J_0}^\delta} -1 + \delta$.

In order to do this, we want to use theorem 27 but here the polynomial appearing in (3.1) is a priori with rational coefficients.

According to theorem 27, we have :

$$\widetilde{Z}\left(\mathbf{s}^0(1+t)\right) = \prod_{\substack{\beta \in \mathbf{N}^{\# J_0} \\ 1 \leq \|\beta\| \leq m_\delta}} \zeta\left(\sum_{j \in J_0} \beta_j \langle \mathbf{s}^0, \alpha_j \rangle (1+t)\right)^{\gamma(\beta)} G_{m_\delta^{-1}}\left(\mathbf{s}^0 (1+t)\right);$$

where $G_{m_\delta^{-1}}$ is holomorphic for $\Re(t) > -1 + \delta$.

You must notice (see [2]) that the $\gamma(\beta)$ can be calculated explicitly by recurrence on $\|\beta\|$ and that we show without difficulties that if the starting polynomial is with rational coefficients, then all the $\gamma(\beta)$ are also rational.

Moreover, because the $\gamma(\beta) \in \mathbf{Q}$ and consequently it is necessary to be able to define a logarithm, a factor of the form $\zeta\left(\sum_{j \in J_0} \beta_j \langle \mathbf{s}^0, \alpha_j \rangle (1+t)\right)^{\gamma(\beta)}$ for $\|\beta\| \leq m_\delta$ is an holomorphic function in any domain simply connected containing neither zero, nor pole of the function $\zeta\left(\sum_{j \in J_0} \beta_j \langle \mathbf{s}^0, \alpha_j \rangle (1+t)\right)$; it is the case in particular for $\Re(t) >_{\partial_{J_0}^\delta} -1 + \delta$.

Notice to finish that $\partial_{J_0}^\delta$ is a countable and isolated set since it is a finite union of $\partial_{J_0}(m)$ for $m \leq m_\delta$; which completes the proof of the theorem.

□

7.5.2 On the existence of a continuation on a real hypersurface beyond $\partial W(0)$.

Previously we have seen that Theorem 29 was optimal regarding to the complex dimension : the natural boundary, when existing, makes sense only for meromorphic continuations of maximal complex dimension ; and as we have already seen with the example in the begining of this section, it is possible that there exists a meromorphic continuation beyond $\partial W(0)$ in lower complex dimension.

Thus we cannot expect to make sense to the natural boundary in a general way if we come down from a complex dimension.

However, we can wonder if it is possible to improve the previous results only by coming down from one real dimension ; in other words if there can exist or not a continuation on a real hypersurface beyond $\partial W(0)$ in a sense needing to be precised since in this case the notion of holomorphy does not a priori make sense.

For that we need to appeal to the theory of C-R functions (Cauchy-Riemann) on a real hypersurface which generalises the class of holomorphic functions.

To start, here is a result that will be useful later :

Proposition 10 ([22]). *Let D be a connected open ball of $\mathbf{C}^n$ and f and g be analytic functions on D.*

If f coincides with g on a part S of D for which there exists a connected open V of D such that $V \setminus S$ is not connected, then f coincides with g on D.

In particular, this result is true if S is a real hypersurface of D.

The reader could refer to [22] page 15 for a proof.

Remember that if $\mathcal{X}$ is an analytic complex manifold of dimension n and if f is a function of class $\mathcal{C}^1$ on $\mathcal{X}$, for all $x \in \mathcal{X}$ we have :

$$\begin{aligned}
(df)_x &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i}(x)(dz_i)_x + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i}(x)(d\overline{z}_i)_x \\
&= \partial f_x + \overline{\partial} f_x;
\end{aligned}$$

Then we say that ∂f (respectively $\overline{\partial} f$) is a differential 1-form of type $(1,0)$ (respectively of type $(0,1)$) ; and f is holomorphic on $\mathcal{X}$ if and only if $\overline{\partial} f_x = 0$ for all $x \in \mathcal{X}$.

Définition 43. We say that a differential (p_1+p_2)-form ω $\mathcal{C}^\infty$ on a domain of chart U of $\mathcal{X}$ is of bidegree (p_1, p_2) if it admits the unique following writing :

$$\omega = \sum_{\substack{|I|=p_1 \\ |J|=p_2}} c_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J;$$

where the $c_{I,J}$ are functions of class $\mathcal{C}^\infty$ on U, the sum being done on the multi-indexes $I = (i_1, \ldots, i_{p_1})$ and $J = (j_1, \ldots, j_{p_2})$ strictly increasing and

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_{p_1}} \text{ (resp. } d\overline{z}_J = d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_{p_2}}).$$

Définition 44. If
$$\omega = \sum_{\substack{|I|=p_1 \\ |J|=p_2}} c_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J;$$
we put :
$$\overline{\partial}\omega = \sum_{\substack{|I|=p_1 \\ |J|=p_2}} \overline{\partial}(c_{I,J}) dz_I \wedge d\overline{z}_J = \sum_{\substack{|I|=p_1 \\ |J|=p_2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial c_{I,J}}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$
$\overline{\partial}\omega$ is thus a differential form of bidegree (p_1, p_2+1).

Now we are able to define what means a C-R function on a real hypersurface :

Définition 45. A function f continuous on a real hypersurface M of class $\mathcal{C}^1$ in $\mathbf{C}^n$ is said to be C-R (Cauchy-Riemann) if for all differential form ω of bidegree $(n, n-2)$, of class $\mathcal{C}^\infty$ in a neighbourhood of M and such that supp $\omega \cap M$ is compact, we have :
$$\int_M f\overline{\partial}\omega = 0.$$
Exemple 4. If F is an holomorphic function in a neighbourhood of M, then $f = F\mid_M$ is C-R on M. Indeed let ω be a differential form of bidegree $(n, n-2)$ satisfying the conditions of the previous definition and let D be a bounded domain whose edge is $\mathcal{C}^1$ by pieces contained inside the domains of definition of F and ω, such that $\partial D \cap M \supset$ supp $\omega \cap M$ and that the orientation on M coincides with that of ∂D. Then :

$\int_M f\overline{\partial}\omega$	$=$	$\int_{\partial D} F\overline{\partial}\omega$	by definition of D and because $f = F\mid_M$
	$=$	$\int_{\partial D} \overline{\partial}(F\omega)$	because F is holomorphic
	$=$	$\int_{\partial D} d(F\omega)$	because $\partial(F\omega) = 0$ since ω is of bidegree $(n, n-2)$
	$=$	$\int_D d\left(d(F\omega)\right) = 0$	according to Stokes's formula.

When f is of class $\mathcal{C}^1$ on M, there is an equivalent definition to definition 45 (the reader will find a proof of this equivalence in [22]) :

Définition 46. If M is defined by $\{z \in U \mid r(z) = 0\}$, where U is an open of $\mathbf{C}^n$ and r a function $\mathcal{C}^1$ from U to $\mathbf{R}$ such that $dr(z) \neq 0$ if $z \in U$, the function $f \in \mathcal{C}^1(M)$ is C-R if and only if for all $v \in M$, we have :
$$\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i}(v) = 0,$$
for all $t \in \mathbf{C}^n$ such that $\sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_i}(v)\overline{t}_i = 0$.

Let us formulate a fondamental result concerning C-R functions which is particularly interesting in this part and of which we will find a proof in [26] :

Proposition 11. *Let M be a real-analytic hypersurface in an open of $\mathbf{C}^n$, and $f : M \longrightarrow \mathbf{C}$ be a real-analytic C-R function.*

Then, if $v \in M$, there exists a neighbourhood U of v and F an holomorphic function on U such that $F = f$ on $U \cap M$.

Finally, this last proposition permits to keep the result of Theorem 29 in most of the cases if we come down from a real dimension :

Théorème 31. *We still suppose that the polynomial h is not cyclotomic and that $\mathcal{F}(\alpha_e)$ is a nondegenerate face.*

Then $\mathcal{F}(\alpha_e) \subseteq \partial W(0)$ is a natural boundary for $Z(\boldsymbol{s})$ in the sense that there does not exist any real-analytic C-R extension defined on a real-analytic hypersurface which intersects across $\mathcal{F}(\alpha_e)$.

Preuve. Consider M to be a real-analytic hypersurface which intersects across $\mathcal{F}(\alpha_e)$ and assume by absurd that f is a continuation of $Z(\mathbf{s})$ on M in a neighbourhood of a point $\mathbf{s}^0 \in M \cap \mathcal{F}(\alpha_e)$. Moreover put $S = M \cap W(0)$. Then, thanks to proposition 11, there exists a neighbourhood $U \subset \mathbf{C}^n$ of $\mathbf{s}^0$ and F an holomorphic function on U such that $F = f$ on $U \cap M$. But since f is an extension of $Z(\mathbf{s})$, we also have that $Z = f = F$ on S.

According to proposition 10, we have that $Z = F$ on $U \cap W(0) \neq \emptyset$.

But that means that there exists an open ball $\mathcal{B} \subset U \subset \mathbf{C}^n$ centered in $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e)$ such that F extends Z to $\mathcal{B}$; which is impossible in accordance with Theorem 29.

□

7.5.3 Application to the conjecture of Rudnick and du Sautoy.

Let us precise the link between Conjecture 3 and previous Theorem 29.

Write $h(X_1, X_2) = 1 + \sum_{j=1}^{r} \left(a_{j,0} + a_{j,1}X_1 + \cdots + a_{j,n_j}X_1^{n_j}\right) X_2^j \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ and suppose without loss of generality that it does not contain any cyclotomic factor (since we suppose that h is not cyclotomic).

We put :

$$S_1 = \max\left\{\frac{n_j + 1}{j}, j \in \{1, \ldots, r\}\right\}; S_0 = \max\left\{\frac{n_j}{j}, j \in \{1, \ldots, r\}\right\}.$$

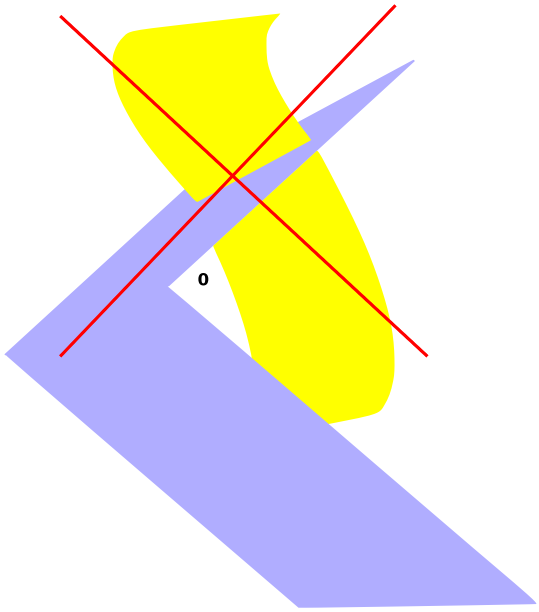

FIG. 7.5 – Illustration of theorem 31 for $n = 3$ (projection in the space of real parts).

And we consider the Euler product appearing in conjecture 3 :

$$Z\left(s\right) = \prod_{p \text{ prime}} h\left(p, p^{-s}\right).$$

One can easily check that $Z\left(s\right)$ is holomorphic for $\Re(s) > S_1$.

Then, we introduce the Euler product of two variables :

$$Z(s_1, s_2) = \prod_{p} h(p^{-s_1}, p^{-s_2}).$$

So we have that $Z(s_1, s_2)$ continues meromorphically to :

$$W\left(0\right) = \left\{(s_1, s_2) \in \mathbf{C}^2, \sigma_2 > -\frac{n_j}{j}\sigma_1, \forall j \in \{1, \ldots, r\}\right\}.$$

Thus we can see that $\partial W(0)$ is made of two hyperplanes :

1. one of equation $\sigma_2 = -S_0\sigma_1$ (for $\sigma_1 \leq 0$) ;
2. the other one of equation $\sigma_2 = -\min\left(\frac{n_j}{j}\right)\sigma_1$ (for $\sigma_1 \geq 0$).

The only points $\mathbf{s}^0$ on the edge of $W(0)$ lying on both hyperplanes are such that $\sigma_1^0 = \sigma_2^0 = 0$.

Consequently if we choose $\mathbf{s}^0 = (-1, S_0)$, it is not necessary to move it in order to have $(C.3)$.

And if we put $\theta = (0,1)$, we obtain :

$$Z(\mathbf{s}^0 + t\theta) = \prod_p h\left(p, p^{-S_0 - t}\right).$$

Thus, to say that $\Re(s) = S_0$ is a natural boundary of $Z(s)$ is equivalent to say that we cannot extend $Z(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ beyond $\Re(t) = 0$ for the direction $\theta = (0,1)$.

But thanks to Theorem 29, we know that it cannot exist any meromorphic continuation to an open ball $\mathcal{B}$ (of complex dimension two) centered in s^0. In addition, we can assert, in the way of the conjecture, the following result which is a consequence of the previous section :

Corollaire 7.5.1. There does not exist any real-analytic C-R extension on a real-analytic hypersurface intersecting across $\partial W(0)$ in $\mathbf{s}^0$ if the face containing $\mathbf{s}^0$ is nondegenerate. In particular, there cannot exist any real-analytic C-R extension on a real-analytic hypersurface containing the direction $\theta = (0,1)$ of the conjecture.

7.6 An application in diophantine geometry.

This part is essentially a taking up of an application of [2], but here we will use the previous result concerning the natural boundary of multivariable Euler products.

We consider the analytic properties of a multivariable Dirichlet series whose coefficients encode membership in the maximal torus of a toric variety X.

We start with a given projective embedding determined by a set of d monomials defining equations of n variables.

The set of exponents of the monomials defining X determines a $d \times n$ matrix $\mathbf{A}$ with integer coefficients, whose rows $\mathbf{a}_j = (a_{j,1}, \ldots, a_{j,n})$ each satifies the property :

$$\sum_i a_{j,i} = 0.$$

The rational points of the variety are defined as follows :

$$X(\mathbf{A}) = \left\{ (x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{Q}) : \prod_{\{i : a_{j,i} \geq 0\}} x_i^{a_{j,i}} = \prod_{\{i : a_{j,i} < 0\}} x_i^{-a_{j,i}} \ \forall j \right\};$$

and its maximal torus $U(\mathbf{A})$ is :

$$U(\mathbf{A}) = \left\{ (x_1 : \ldots : x_n) \in X(\mathbf{A}) : x_1 \cdots x_n \neq 0 \right\}.$$

To each point $\mathbf{x} \in U(\mathbf{A})$, we can multiply the coordinates x_i by a suitable integer to obtain two corresponding opposite n-uples of integers (with positive or negative components) ; and there corresponds a unique primitive lattice point $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\mathbf{x}) = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{N}^n$, that is, $\gcd(m_1, \ldots, m_n) = 1$ and $(m_1 : \ldots : m_n) \in U(\mathbf{A})$.

Then we consider a multivariable Dirichlet series with Euler product in the open set $\Omega = \{\mathbf{s} : \sigma_i > 1, i = 1, \ldots, n\}$ by putting $F_{\mathbf{A}} : \mathbf{N}^n \longrightarrow \mathbf{Z}$ such that :

1. $F_{\mathbf{A}}(m_1, \ldots, m_n) = 1$ if $\gcd(m_1, \ldots, m_n) = 1$ and $\prod_i m_i^{a_{j,i}} = 1 \; \forall j \leq d$,
2. $F_{\mathbf{A}}(m_1, \ldots, m_n) = 0$ if not.

$F_{\mathbf{A}}$ is the characteristic function of $U(\mathbf{A})$ and appears in counting problems of rational points on toric varieties. Indeed, $F_{\mathbf{A}}$ permits to associate a Dirichlet series to a toric variety and consequently to give an asymptotic estimation as t tends to the infinity of the quantity $\#\{\mathbf{x} \in U(\mathbf{A}) : \max_i (m_i(\mathbf{x})) \leq t\}$ thanks to tauberian theorems.

One can show that $F_{\mathbf{A}}$ is multiplicative and $F_{\mathbf{A}}(m_1, \ldots, m_n) = 1$ if and only if $(m_1 : \ldots : m_n) \in U(\mathbf{A})$.

Moreover, for all prime number p and all $\nu \in \mathbf{N}^n_{\geq 0}$, we have :

$$F_{\mathbf{A}}(p^{\nu_1}, \ldots, p^{\nu_n}) = 1 \text{ iff } \nu \in T(\mathbf{A}) := \{\nu \in \mathbf{N}^n_{\geq 0} : \mathbf{A}(\nu) = 0\}.$$

Hence for $\mathbf{s} \in \Omega$ the Dirichlet series studied can be written as follows :

$$Z_{\mathbf{A}}(\mathbf{s}) := \sum_{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{N}^n_{\geq 0}} \frac{F_{\mathbf{A}}(m_1, \ldots, m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}} = \prod_p h_{\mathbf{A}}(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}),$$

where $h_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) := \sum_{\nu \in T(\mathbf{A})} \mathbf{X}^\nu$ is analytic for $|X_i| < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Notice that a priori $h_{\mathbf{A}}$ is not a polynomial.

But here the crucial property is the following :

Définition 47. An analytic function $h(\mathbf{X}) = h(X_1, \ldots, X_n)$ for $|X_i| < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ is said to be unitary[3] if there exists a finite set $K \subseteq \mathbf{N}^n_{\geq 0} \setminus \{\mathbf{0}\}$, positive integers $\{c(\nu)\}_{\nu \in K}$, and a polynomial $V \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, such that for all $\mathbf{X}$ for $|X_i| < 1$ $(i = (1, \ldots, n))$:

$$h(\mathbf{X}) = \left(\prod_{\nu \in K} (1 - \mathbf{X}^\nu)^{-c(\nu)} \right) V(\mathbf{X}).$$

Proposition 12 ([2]). *The function $h_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ is unitary.*

[3]Here unitary does not mean cyclotomic ; this term is that used in [2].

Remarque 31. Notice that if $h_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) = \left(\prod_{\nu\in K}(1-\mathbf{X}^{\nu})^{-c(\nu)}\right) V(\mathbf{X})$, it is clear that V is a polynomial with integer coefficients and satisfies $V(\mathbf{0}) = 1$ since both $h_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ and each $(1-\mathbf{X}^{\nu})^{-c(\nu)}$ equal 1 when $\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

In addition we have :

$$Z_{\mathbf{A}}(\mathbf{s}) = \left(\prod_{\mathbf{m}\in K} \zeta(\langle \nu, \mathbf{s}\rangle)^{c(\nu)}\right) Z(V, \mathbf{s});$$

where $Z(V, \mathbf{s}) = \prod_p V(p^{-s_1}, \dots, p^{-s_n})$.

Hence we can consider the $W(\delta)$ ($\delta \geq 0$) for $Z_{\mathbf{A}}$ as those corresponding to the Euler product $Z(V, \mathbf{s})$ associated to the polynomial V.

Consequently, we obtain the following theorem :

Théorème 32. *The function $\boldsymbol{s} \longmapsto Z_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{s})$ can be meromorphically continued to $W(0)$ (here $W(\delta)$ for $\delta \geq 0$ is calculated in relation to the polynomial V).*

In addition, $\boldsymbol{s} \longmapsto Z_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{s})$ can be meromorphically continued to $\mathbf{C}^n$ if and only if V is cyclotomic.

And if V is not cyclotomic and $\mathcal{F}(\alpha_e) \subseteq \partial W(0)$ is a nondegenerate face, $\mathcal{F}(\alpha_e)$ is a natural boundary of the meromorphic continuation of $Z_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{s})$.

Remarque 32. Here the result is stronger than in [2]. Indeed, here "natural boundary" is in the sense of theorem 31.

Chapitre 8

English version of Chapter 5.

8.1 Introduction.

The purpose of this work is to study a multivariable analogue of a conjecture of Rudnick and du Sautoy concerning the maximal domain of meromorphy of an Euler product

$$Z(s) = \prod_{p \text{ prime}} h\left(p^{-s}, p\right),$$

where $h(X_1, X_2) \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$.

Let's recall the formulation of this conjecture :

Conjecture 4. $Z(s) = \prod_{p \text{ prime}} h\left(p^{-s}, p\right)$ can be meromorphically continued to the whole complex plane if and only if there exist cyclotomic polynomials $g_i(U)$ $(i = 1, \ldots, m)$ (meaning divisors of $(1 - U^{m_i})^{n_i}$ for a certain n_i and a certain m_i) and integers u_i, v_i such that :

$$h(X_1, X_2) = g_1\left(X_1^{u_1} X_2^{v_1}\right) \cdots g_m\left(X_1^{u_m} X_2^{v_m}\right).$$

Precisely, we are interested in the maximal domain of meromorphy of an Euler product of the following form :

$$Z(\mathbf{s}) := Z(s_1, \ldots, s_n) = \prod_{p \text{ prime}} h\left(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c}\right) := Z^{n+1}(s_1, \ldots, s_n, c),$$

where $n > 1$, $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ is a fixed non zero integer and $h(X_1, \ldots, X_{n+1}) \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ is a polynomial with integral coefficients of constant coefficient equal to 1.

What has mainly motivated this study is the resolution of a problem which has been asked by N. Kurokawa and H. Ochiai.

If A is a ring, the multivariable global Igusa zeta function is defined as follows (for $n > 1$) :

$$Z^{\text{ring}}(s_1,\ldots,s_n;A) := \sum_{m_1,\ldots,m_n\geq 1} \left|\mathrm{Hom}_{\text{ring}}\left(A, \frac{\mathbf{Z}}{m_1\cdots m_n\mathbf{Z}}\right)\right| m_1^{-s_1}\cdots m_n^{-s_n}.$$

By the Chinese remainder theorem, we know that this zeta function expresses as an Euler product :

$$Z^{\text{ring}}(s_1,\ldots,s_n;A) = \prod_p Z_p^{\text{ring}}(s_1,\ldots,s_n;A)$$

where

$$Z_p^{\text{ring}}(s_1,\ldots,s_n;A) = \sum_{k_1,\ldots,k_n\geq 0} \left|\mathrm{Hom}_{\text{ring}}\left(A, \frac{\mathbf{Z}}{p^{k_1+\cdots+k_n}\mathbf{Z}}\right)\right| p^{-k_1s_1-\cdots-k_ns_n}.$$

In particular the problem here consists in establishing the maximal domain of meromorphy of

$$Z^{\text{ring}}(s_1,\ldots,s_n;\mathbf{Z}[T,T^{-1}]) = \sum_{m_1,\ldots,m_n\geq 1} \frac{\varphi(m_1\cdots m_n)}{m_1^{s_1}\cdots m_n^{s_n}},$$

where φ designates the classical Euler function.

As it is pointed out in [20] (page 12), the analytic behavior of this product is complicated; nevertheless we manage to determine here its domain of meromorphy thanks to the using of tools which have been developped in Chapter 7 to describe the natural boundary - when it does exist - of a Euler product of the form $\prod_p h(p^{-s_1},\ldots,p^{-s_n})$.

Moreover, it turns out that this problem is a particular case of the multivariable analogue of the conjecture of Rudnick and du Sautoy.

Notation :

In the following we will use these notations :

For $r \geq 1$ and $n > 1$ we write :

$$\begin{aligned} h(\mathbf{X}) = h(X_1,\ldots,X_{n+1}) &= 1+\sum_{j=1}^r a_j X_1^{\alpha_j^1}\cdots X_{n+1}^{\alpha_j^{n+1}} \\ &= 1+\sum_{j=1}^r a_j\left(X_1\cdots X_n\right)^{\alpha_j^{(n)}} X_{n+1}^{\alpha_j^{n+1}} \\ &= 1+\sum_{j=1}^r a_j \mathbf{X}^{\alpha_j}; \end{aligned}$$

with $\alpha_j = (\alpha_j^{(n)}, \alpha_j^{n+1}) = (\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^n, \alpha_j^{n+1}) \in \mathbf{N}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ for $j \in \{1, \ldots, r\}$ and $a_j \in \mathbf{Z}$.

For all $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbf{N}^r$, we put :

$$\|\mathbf{m}\| = \sum_{j=1}^{r} m_j.$$

For $\mathbf{s} \in \mathbf{C}^{n+1}, \mathbf{s} = (\mathbf{s}^{(n)}, s_{n+1}) = (s_1, ..., s_{n+1}), \forall l \in \{1, ..., n+1\}$ we write :

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma_l & = & \Re(s_l); & & \gamma_l & = & \Im(s_l); \\ \sigma & = & \Re(\mathbf{s}) & = & (\sigma^{(n)}, \sigma_{n+1}) & = & (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1}); \\ \gamma & = & \Im(\mathbf{s}) & = & (\gamma^{(n)}, \gamma_{n+1}) & = & (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}); \end{array}$$

and

$$\alpha^l = \left(\alpha_1^l, ..., \alpha_r^l\right).$$

Given $\mathbf{m} \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbf{m} = (m_1, ..., m_r)$ and $l \in \{1, ..., n+1\}$, we define :

$$\langle \mathbf{m}, \alpha^l \rangle = \sum_{j=1}^{r} m_l \alpha_j^l$$

(respectively for $\mathbf{s} = (s_1, ... s_{n+1})$ and $j \in \{1, ..., r\}$, $\langle \mathbf{s}, \alpha_j \rangle = \sum_{l=1}^{n+1} s_l \alpha_j^l$).

We must underline the natural appearing of a supplementary hypothesis which permits to distinguish the Rudnick-du Sautoy conjecture to its multivariable analog since a priori this multivariable analog contain the conjecture itself.

So from now on we will suppose that

$$\text{Rank}\left(\alpha_j^{(n)}, j \in \{1, \ldots, r\}\right) > 1. \tag{8.1}$$

Indeed, if this hypothesis is not satisfied, we would have the existence of e such that for all $j \in \{1, \ldots, r\}$, $\alpha_j^{(n)} = q_j \alpha_e^{(n)}$ $(q_j \in \mathbf{Q})$; which would give :

$$h(\mathbf{X}) = 1 + \sum_{j=1}^{r} a_j \left((X_1 \cdots X_n)^{\alpha_e^{(n)}}\right)^{q_j} X_{n+1}^{\alpha_j^{n+1}}.$$

And we would be led to study a one variable product of the form $\prod_p h(p^{-s}, p^{-c})$.

The aim of this work is to establish the maximal domain of meromorphy of all product $\prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c})$ $(n > 1)$ which cannot be reduced to a one variable product.

We also suppose that for all $j \in \{1, \ldots, r\}, \alpha_j^{(n)} = (\alpha_j^1, \ldots, \alpha_j^n) \neq \mathbf{0}$.

We must notice that, contrary to the one variable case, the multivariable case permits to use the methods developped in Chapter 7

These methods consist in considering the product in a suitable direction in a neighbourhood of a point of the supposed natural boundary ; Cette méthode consiste à considérer le produit dans une direction convenable au voisinage d'un point de la frontière supposée naturelle ; le cadre multivariable permet alors de déplacer le point sur la frontière si nécessaire et d'utiliser des arguments génériques pour assurer l'accumulation de pôles ou de zéros au voisinage à droite de la frontière.

Définition 48. We will say that $h\left(X_1,\ldots,X_{n+1}\right)$ is cyclotomic if there exists a finite subset I of $\mathbf{N}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ such that we have :

$$h\left(X_1,\ldots,X_{n+1}\right)=\prod_{\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in I}\left(1-X_1^{\lambda_1}\cdots X_n^{\lambda_{n+1}}\right)^{\gamma(\lambda)},$$

where the $\gamma\left(\lambda\right)$ for $\lambda\in I$ are positive or negative integers.

If h is cyclotomic, it is easy to see that the corresponding Euler product is a finite product of classical Riemann zeta function ; and consequently can be meromorphically continued to whole $\mathbf{C}^n$.

So from now on, we will suppose that h is not cyclotomic.

Définition 49. Suppose that h is not cyclotomic and does not contain any cyclotomic factor.

For all $\delta\geq 0$ write :

$$W\left(\delta\right)=\left\{\mathbf{s}\in\mathbf{C}^{n+1}:\left\langle\sigma,\alpha_j\right\rangle>\delta,\forall j\in\{1,...,r\}\right\}.$$

and

$$W_c(\delta)=\left\{\mathbf{s}^{(n)}\in\mathbf{C}^n\mid\left\langle\sigma^{0(n)},\alpha_j^{(n)}\right\rangle+c\;\alpha_j^{n+1}>\delta,\forall j\in\{1,\ldots,r\}\right\}.$$

8.2 Statements of main results.

We suppose here that h is such that $\partial W(0)$ contains at least one nondegenerate face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ in the sense of Definition 35.

The aim of this article is essentially to prove two complementary results concerning the natural boundary (meaning the boundary beyond that there does not exist any meromorphic continuation) of $\prod_p h(p^{-s_1},\ldots,p^{-s_n},p^{-c})$ which depend on the validation of an hypothesis that we will note (H) (see Theorem 33).

We will see that if this property (H) is satisfied we are able to determine the natural boundary in a strong sense (see Theorem 33) whereas if it is not verified, we still obtain the natural boundary but in a weaker sense (see Theorem 34) : we will see that it can not exist any meromorphic continuation by translating the boundary on the left.

Théorème 33. *Let $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ and*

$$Z(\boldsymbol{s}) = \prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c}).$$

Assume that the polynomial $h(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$ is not cyclotomic, does not contain any cyclotomic factors, admits at least at least one nondegenerate face $\mathcal{F}(\alpha_e)$, verifies (8.1) and satisfies in addition the following property (H) :

$$\text{for all } j \in \{1, \ldots, r\} \text{ such that } \alpha_j \notin \mathbf{Q}\alpha_e,\ \alpha_j^{(n)} \notin \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}.$$

Then $\mathcal{F}(\alpha_e) \cap \{s_{n+1} = c\} \subseteq \partial W_c(0)$ is the natural boundary (in strong sense) of $Z(\boldsymbol{s})$: $Z(\boldsymbol{s})$ meromorphically extends to $W_c(0)$ and there does not exist any continuation of $Z(\boldsymbol{s})$ to a domain containing an open ball $\mathcal{B}$ (of dimension n) centered in a point $\boldsymbol{s}^0$ such that $\boldsymbol{s}^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e) \cap \{s_{n+1} = c\} \subseteq \partial W_c(0)$.

Théorème 34. *Let $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ and*

$$Z(\boldsymbol{s}) = \prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c}).$$

Assume that the polynomial $h(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$ is not cyclotomic, does not contain any cyclotomic factors, admits at least one nondegenerate face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ and verifies (8.1) but does not satisfy the property (H) of Theorem 33.

We assume in addition the following property :

$$\text{if } \alpha_{j_0}^{(n)} \notin \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)} \text{ then the polynomials } 1 + \sum_{\alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_j \boldsymbol{X}^{\alpha_j} \text{ and } \sum_{j : \alpha_j - \alpha_{j_0} \in \mathbf{Q}\alpha_e} a_j \boldsymbol{X}^{\alpha_j} \text{ are relatively prime.} \tag{8.2}$$

Then $\partial W_c(0)$ is the natural boundary (in weak sense) of $Z(\boldsymbol{s})$: $Z(\boldsymbol{s})$ does not admit a meromorphic extension to $W_c(\delta)$ for any $\delta < 0$.

In particular, $Z(\boldsymbol{s})$ does not admit any meromorphic continuation to $\mathbf{C}^n$.

As an application, we will see that we can determine the natural boundary (in the strong sense) of Igusa's zeta function $Z^{\mathrm{ring}}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}])$ by obtaining the following result :

Théorème 35. *The maximal domain of meromorphy $\mathcal{M}$ of Igusa's zeta function :*

$$Z^{ring}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}]) = \sum_{m_1, \ldots, m_n \geq 1} \frac{\varphi(m_1 \cdots m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}}$$

is given by :

$$\mathcal{M} = \left\{ \boldsymbol{s} \in \mathbf{C}^n \mid \forall\ I \subseteq \{1, \ldots, n\}, \sum_{i \in I} \sigma_i > -1 + \#I \right\}.$$

In particular, if $s^0 \in \partial\mathcal{M}$, then there does not exist any meromorphic continuation of $Z^{ring}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}])$ to a domain containing an open ball $\mathcal{B}$ of dimension n centered in s^0.

8.3 Proof of Theorem 33.

Consider a point $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e) \cap \{s_{n+1} = c\}$ of real part $\sigma^0 = (\sigma^{0^{(n)}}, c)$ and of imaginary part $\gamma^0 = (\gamma^{0^{(n)}}, 0)$.

Consequently, we have for all $j \in \{1, ..., r\}$, $\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \geq 0$ and $\langle \sigma^0, \alpha_e \rangle = 0$.

Consider an open ball $\mathcal{B}$ of dimension n and of arbitrarily small radius around the point $\mathbf{s}^{0^{(n)}}$.

Prove that moving $\mathbf{s}^{0^{(n)}} \in \mathcal{B}$ if necessary such that $\mathbf{s}^0 = (s_1^0, \ldots, s_n^0, c) = (\mathbf{s}^{0^{(n)}}, c) \in \partial W(0)$, we can suppose that :

$$\left\langle (\sigma^{0^{(n)}}, c), \alpha_j \right\rangle = 0 \iff \alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e. \tag{8.3}$$

For this suppose that we have the existence of j_1 and of j_2 such that $\mathbf{Q}\alpha_{j_1} \neq \mathbf{Q}\alpha_{j_2}$ and such that :

$$\langle (\sigma^{0^{(n)}}, c), \alpha_{j_1} \rangle = \langle (\sigma^{0^{(n)}}, c), \alpha_{j_2} \rangle = 0.$$

Then we have :

1. $\langle (\sigma^{0^{(n)}}, c), \alpha_{j_1} \rangle = \sum_{l=1}^{n} \sigma_l^0 \alpha_{j_1}^l + c\ \alpha_{j_1}^{n+1} = 0$ defines an affine real space A_1 of dimension $n - 1 > 0$ (according to $\sigma^{0^{(n)}}$).
2. $\langle (\sigma^{0^{(n)}}, c), \alpha_{j_2} \rangle = \sum_{l=1}^{n} \sigma_l^0 \alpha_{j_2}^l + c\ \alpha_{j_2}^{n+1} = 0$ defines an affine real space $A_2 \neq A_1$ of dimension $n - 1 > 0$ (according to $\sigma^{0^{(n)}}$) because if $\alpha_{j_2}^{(n)} \in \mathbf{Q}\alpha_{j_1}^{(n)}$ we would have necessarily $\alpha_{j_2} \in \mathbf{Q}\alpha_{j_1}$ since $c \neq 0$.

Consequently we have necessarily that $\sigma^{0^{(n)}} \in A_1 \bigcap A_2$ and hence it belongs to an affine subspace of dimension less than or equal to $n - 2$; so we have (8.3) moving $\sigma^{0^{(n)}}$ if necessary such that $\mathbf{s}^{0^{(n)}} \in \partial W_c(0) \cap \mathcal{B}$.

In the same way, we can suppose (moving $\sigma^{0^{(n)}}$ if necessary such that $(\sigma^{0^{(n)}}, c) \in \partial W(0)$ by avoiding a countable union of closed sets of empty interior) that for $\lambda = (\lambda^{(n)}, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{Q}^{n+1}$:

$$\left\langle (\sigma^{0^{(n)}}, c), \lambda \right\rangle = 0 \iff \lambda \in \mathbf{Q}\alpha_e; \tag{8.4}$$

From now on, we will also suppose without loss of generality (rearranging the indexes if necessary) that $\alpha_e^n \neq 0$.

Définition 50. Given $e \in \{1, \ldots, r\}$ we denote by $\langle \alpha_e \rangle$ the line connecting $\mathbf{0}$ and integer point α_e in $\mathbf{R}^n$, and then define the e-th main part of h

$$[h]_e(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha_j \in \langle \alpha_e \rangle} a_j \mathbf{X}^{\alpha_j}.$$

Définition 51. Given $e \in \{1, \ldots, r\}$ we set

$$\begin{array}{ll} \Lambda_e & = \left\{ j \in \{1, \ldots, r\} : \alpha_j \in \langle \alpha_e \rangle \right\} \\ B_e & = \left\{ \beta \in \mathbf{N}^r : \beta_j = 0 \quad \text{if} \quad j \notin \Lambda_e \right\}. \end{array}$$

As in Chapter 7, the aim is here to verify the accumulation of the zeros or poles of the one variable function in t complex :

$$t \longmapsto Z^{n+1}(s_0^1 + t\theta_1, \ldots, s_0^n + t\theta_n, c) = Z^{n+1}(\mathbf{s}^0 + t\theta) = Z(\mathbf{s}^0 + t\theta);$$

considering a direction $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n, 0) \in \mathbf{Q}_{\geq 0}^{n+1}$ with $\theta_{n+1} = 0$ and $\theta_l > 0$ for $l \in \{1, \ldots, n\}$ inside a rectangle (for $u \in \mathbf{R}, \eta > 0$) :

$$\Xi_{u,\eta} : \quad \begin{array}{l} 0 < \Re(t) < 1 \\ 0 < u < \Im(t) < u + \eta. \end{array}$$

We suppose that θ satisfies the following conditions :

$$\langle \theta, \alpha_j \rangle = \left\langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \right\rangle \geq 1 \text{ for all } j \in \{1, \ldots, r\}. \tag{8.5}$$

Firstly, Theorem 28 §7.3.2 permits on one hand to verify the fact that $Z^{n+1}(s_1, \ldots, s_{n+1})$ continues meromorphically until $W(0)$ and gives its expression in $W(\delta)$ for all $\delta > 0$:

Théorème 36. *Consider the quantity :*

$$C := C(h) = \frac{1}{|a_1| + \cdots + |a_r|}. \tag{8.6}$$

$Z^{n+1}(\boldsymbol{s})$ is meromorphic in $W(0)$.

Moreover if we write for all $\delta > 0$ $M_\delta = \left[C^{-\frac{1}{\delta}}\right] + 1$ ($M_\delta \in \mathbf{N}$), the following relation holds in $W(\delta)$:

$$Z^{n+1}(\boldsymbol{s}) = \prod_{p \le M_\delta} h\left(p^{-s_1}, ..., p^{-s_{n+1}}\right) \prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\boldsymbol{0}\}} \left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{\ell=1}^{n+1} \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell\right)\right]^{-\gamma(\beta)} ;$$

where $\zeta_{M_\delta}(z) = \zeta(z) \prod_{p \le M_\delta}(1 - p^{-z})$ (ζ being the classical Riemann zeta function) has exactly the same zeroes and poles as the classical Riemann zeta function with the same multiplicities.

In addition, the possible zeros or poles of $\prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\boldsymbol{0}\}} \left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{\ell=1}^{n+1} \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell\right)\right]^{-\gamma(\beta)}$, which is meromorphic in $W(\delta)$, belong to the set :

$$\Phi_\delta = \left\{ \boldsymbol{s} \in W(\delta), \exists \beta \in \mathbf{N}^r, \sum_{\ell=1}^{n+1} \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell = \rho, \ \rho \text{ zero or pole of } \zeta(.) \right\}.$$

Remarque 33.

1. The fact that the polynomial h is not cyclotomic means that in the writing of Z^{n+1} of Theorem 36, the number of zeta-factors is infinite.
   We are particularly interested in showing the accumulation of zeros of $\prod_{p \le M_\delta} h\left(p^{-s_1}, ..., p^{-s_n}, p^{-c}\right)$ in a suitable direction in a neighbourhood to the right of $\partial W(0)$.
2. In the following, we will take up again the arguments exposed in Chapter 7 to determine the natural boundary. The main difference is that here the direction θ and the imaginary part γ^0 of $\mathbf{s}^0$ are necessarily with $\theta_{n+1} = \gamma^0_{n+1} = 0$.
   This is the reason why we have to consider in particular the vectors $\alpha_j^{(n)}$ and the hypotheses (8.1) and (H) ; and we will precise all the modifications that this require while we follow the argumentation presented in Chapter 7.
   Moreover the fact that the last component s_{n+1} of $\mathbf{s}$ is fixed equal to c leads some major differences compared to Chapter 7. We will notably distinguish a particular case (see Lemma 33) and the arguments that will be used from Lemma 36 will differ significantly from those of Chapter 7 (see Remark 36).

One of the first difficulties is to ensure that the Euler product :

$$\prod_p h(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}, p^{-c}),$$

although being associated to a polynomial h not cyclotomic, cannot however be written as a finite product of zeta functions after having specialized $s_{n+1} = c$ and a direction θ with $\theta_{n+1} = 0$.

Indeed we can repeat the exemple taken from a recent article [20] of N. Kurokawa and of H. Ochiai which illustrates this difficulty :

Indeed let :

$$h(X_1, X_2, X_3) = 1 - X_1X_2 - X_2X_3 - X_3X_1 + 2X_1X_2X_3;$$

and the corresponding Euler product :

$$Z(s_1, s_2, s_3) = \prod_p \left(1 - p^{-s_1-s_2} - p^{-s_2-s_3} - p^{-s_3-s_1} + 2p^{-s_1-s_2-s_3}\right).$$

Here we have :

$$W(0) = \{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbf{C}^3 \mid \sigma_1 + \sigma_2 > 0, \sigma_2 + \sigma_3 > 0, \sigma_3 + \sigma_1 > 0\}.$$

The polynomial h is not cyclotomic ; because :

$$h(X_1, X_1, X_1) = (1 - X_1^2)(1 - X_1)^{-1}(1 - 2X_1);$$

and $(1 - 2X_1)$ is clearly not cyclotomic.

According to the main result of Chapter 7, we know that Z continues until $W(0)$ and that there does not exist any meromorphic continuation to an open ball of complex dimension 3 beyond any point of $\partial W(0)$.

However,

$$Z(s_1, s_2, 0) = \prod_p \left(1 - p^{-s_1}\right)\left(1 - p^{-s_2}\right) = \frac{1}{\zeta(s_1)\zeta(s_2)};$$

$Z(s_1, s_2, 0)$ is thus meromorphic on $\mathbf{C}^2$: here there is a continuation on a complex hypersurface beyond the point $\mathbf{0} \in \partial W(0)$.

The fact to have $c \neq 0$ here is hence of a crucial importance to avoid this difficulty as shown by the following result :

Lemme 32. *Let $h(X_1, \ldots, X_{n+1}) \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ be a non cyclotomic polynomial in the sense of Definition 48.*

Then if $\boldsymbol{s}^0 = (\boldsymbol{s}^{0(n)}, c) \in \partial W(0)$ and $c \neq 0$, the Euler product in the variable t :

$$\prod_p h(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}, p^{-c})$$

is not a finite product of zeta functions.

Preuve. Suppose by absurd that the product is written as a finite product of zeta functions. So for $\Re(t)$ large enough we have the following equality for all prime number p :

$$\begin{aligned} h(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n},p^{-c}) &= 1+\sum_{j=1}^{r} a_j p^{-\langle \mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle - t\langle\theta,\alpha_j\rangle} \\ &= \prod_{\beta\in I\subseteq \mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}\ \text{finite}} \left(1-p^{-\sum_{j=1}^{r}\beta_j\left(\langle \mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle + t\langle\theta,\alpha_j\rangle\right)}\right)^{\gamma(\beta)}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Write :

$$g(\mathbf{X}) = g(X_1,\ldots,X_{n+1}) = \prod_{\beta\in I\subseteq \mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} \left(1-\mathbf{X}^{\sum_{j=1}^{r}\beta_j\alpha_j}\right)^{\gamma(\beta)}.$$

Then the equality (8.7) gives for all prime number p large enough and for $\Re(t)$ large enough :

$$(h-g)(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n},p^{-c}) = 0. \tag{8.8}$$

Notice that $h \not\equiv g$ since h is not cyclotomic by hypothesis.

Now let show that (8.8) is not possible. For this we check that $p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n}$ and p^{-c} are algebraically independent.

For that it suffices to verify that we can choose t such that the $\sigma_l^0+\Re(t)\theta_l$ for $l\in\{1,\ldots,n\}$ and c are linearly independent on $\mathbf{Q}$ since a finite sum of monomials in $p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n}$ and p^{-c} expresses as (J being here a finite subset of $\mathbf{N}^{n+1}$) :

$$\sum_{\mathbf{m}\in J\subseteq\mathbf{N}^{n+1}} c_{\mathbf{m}}\ p^{-\langle \mathbf{m},(s_1^0+t\theta_1,\ldots,s_n^0+t\theta_n,c)\rangle} = \sum_{\mathbf{m}\in J\subseteq\mathbf{N}^{n+1}} c'_{\mathbf{m}}\ p^{-\langle \mathbf{m},(\sigma_1^0+\Re(t)\theta_1,\ldots,\sigma_n^0+\Re(t)\theta_n,c)\rangle} \tag{8.9}$$

where $c'_{\mathbf{m}} = c_{\mathbf{m}}\ p^{i\left(\langle \mathbf{m},(\gamma_1^0,\ldots,\gamma_n^0,0)\rangle + \Im(t)\langle \mathbf{m},(\theta_1,\ldots,\theta_n,0)\rangle\right)}$.

And if the $\sigma_l^0+\Re(t)\theta_l$ for $l\in\{1,\ldots,n\}$ and c are linearly independent on $\mathbf{Q}$, then $\min_{\mathbf{m}\in J}\left(\langle \mathbf{m},(\sigma_1^0+\Re(t)\theta_1,\ldots,\sigma_n^0+\Re(t)\theta_n,c)\rangle\right) := M_{\mathbf{m}_0}$ is reached for only one value $\mathbf{m}_0\in J$.

And observing that for $\Re(t)$ large enough we have $\langle \mathbf{m},(\sigma_1^0+\Re(t)\theta_1,\ldots,\sigma_n^0+\Re(t)\theta_n,c)\rangle > 0$ since $\theta_l>0$ for $l\in\{1,\ldots,n\}$, we get that for p tending to infinity :

$$\left|\sum_{\mathbf{m}\in J\subseteq\mathbf{N}^{n+1}} c_{\mathbf{m}}\ p^{-\langle \mathbf{m},(s_1^0+t\theta_1,\ldots,s_n^0+t\theta_n,c)\rangle}\right| \sim |c'_{\mathbf{m}_0}|p^{-M_{\mathbf{m}_0}} = |c_{\mathbf{m}_0}|p^{-M_{\mathbf{m}_0}} \neq 0.$$

Consequently it remains to check that we can choose t such that the $\sigma_l^0+\Re(t)\theta_l$ for $l\in\{1,\ldots,n\}$ and c are linearly independent on $\mathbf{Q}$.

For $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{Q}^{n+1}$, consider the following equality :

$$\sum_{l=0}^{n} \lambda_l(\sigma_l^0 + \Re(t)\theta_l) + \lambda_{n+1}\ c = 0.$$

Then we get :

$$\langle \lambda^{(n)}, \sigma^{0(n)} \rangle + \Re(t)\langle \lambda^{(n)}, \theta^{(n)} \rangle + \lambda_{n+1}\ c = 0. \tag{8.10}$$

Now if $\langle \lambda^{(n)}, \theta^{(n)} \rangle \neq 0$; the equality (8.10) is equivalent to :

$$\Re(t) = -\frac{\lambda_{n+1}\ c + \left\langle \lambda^{(n)}, (\sigma^{0(n)}) \right\rangle}{\langle \lambda^{(n)}, \theta^{(n)} \rangle} \in \mathbf{Q}(\sigma^{0(n)}, c, \theta_1, \ldots, \theta_n).$$

Consequently, if $\Re(t) \notin \mathbf{Q}(\sigma^{0(n)}, c, \theta_1, \ldots, \theta_n)$, the $\sigma_l^0 + \Re(t)\theta_l$ for $l \in \{1, \ldots, n\}$ and c are indeed linearly independent on $\mathbf{Q}$ and thus the equality (8.8) is not possible.

Finally, if $\left\langle \lambda^{(n)}, \theta^{(n)} \right\rangle = 0$, then (8.10) gives that $\langle \lambda, \sigma^0 \rangle = \langle \lambda^{(n)}, \sigma^{0(n)} \rangle + c\lambda_{n+1} = 0$; and the generic condition (8.4) on $\sigma^{0(n)}$ permits to obtain that $\lambda = q\ \alpha_e \in \mathbf{Q}\alpha_e$.

Consequently we have :

$$q\langle \theta, \alpha_e \rangle = \langle \lambda, \theta \rangle = \left\langle \lambda^{(n)}, \theta^{(n)} \right\rangle + \lambda_{n+1}.0 = 0.$$

Hence $q = 0$ since $\langle \theta, \alpha_e \rangle \geq 1$ by the hypothesis (8.5) ; which completes the proof of the lemma. □

8.3.1 Determination of the natural boundary of $Z(\mathrm{s})$.

We will take up again, step by step, the arguments presented in Chapter 7 to prove the existence of an infinity of zeros $Z(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ which are in reality zeros of $t \longmapsto h(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}, p^{-c})$ inside $\Xi_{u,\eta}$.

We will precise all the modifications that requires the fact that here $\gamma_{n+1} = \theta_{n+1} = 0$ while we follow the argumentation presented in Chapter 7.

As in Chapter 7, we define the generalized polynomial

$$W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X, Y) = 1 + \sum_{j=1}^{r} a_j p^{-i\left\langle \gamma^{0(n)}, \alpha_j^{(n)} \right\rangle} X^{\left\langle \sigma^{0(n)}, \alpha_j^{(n)} \right\rangle + c\alpha_j^{n+1}} Y^{\left\langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \right\rangle}.$$

Since $\mathbf{s}^0 = \left(\sigma^{0(n)}, c\right) + i\left(\gamma^{0(n)}, 0\right)$, we have :

$$W^p_{s^0,\theta}(p^{-1}, p^{-t}) = h\left(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}, p^{-c}\right).$$

Remarque 34. 1. $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ is not a polynomial with integral coefficients. However, we can write $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ as a product (a priori infinite)

$$\prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\left(1-X^{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}Y^{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}\right)^{\gamma_{p,\gamma^0}(\beta)}; \tag{8.11}$$

where the exponents $\gamma_{p,\gamma^0}(\beta)$ are a priori complex and the $1-X^{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle}Y^{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle}$ are not real monomials (the exponents are not integers).

We will say by misuse of language that (8.11) is the cyclotomic expansion of $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ and that $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ is cyclotomic if its cyclotomic expansion is a finite product.

2. The hypothesis that $\mathcal{F}(\alpha_e)$ is a nondegenerate face allows us to express Y as a function of X for X in a neighbourhood of 0 ($X\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-$) so that $W^p_{s^0,\theta}(X,Y)=0$; in addition the domain of convergence of the solutions obtained is uniform in p prime (see Proposition 9 page 212 of Chapter 7).

The aim is to find a Puiseux series $Y=\Omega^p_k(X)$ in a neighbourhood of $X=0$ ($X\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-$) such that $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,\Omega^p_k(X))=0$ verifying :

$$|\Omega^p_k(X)|<1 \text{ for } X>0 \text{ in a neighbourhood of } 0.$$

In this way we will have infinitely many zeroes $t_{m,p}$ ($m\in\mathbf{Z}$, p prime large enough) of the form

$$t_{m,p}=-\frac{\log\left(\Omega^p_k(p^{-1})\right)}{\log(p)}+\frac{2\pi mi}{\log(p)} \tag{8.12}$$

(which will be zeroes of the factor $t\longmapsto\prod_p h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n},p^{-c}\right)$ of $Z(\mathbf{s}^0+t\theta)$ which appears in the writing of theorem 36)
of strictly positive real part inside $\Xi_{u,\eta}$ for p large enough.

So write the Puiseux series $\Omega^p_k(X)$, in finite number, which permit to express, for X in a neighbourhood of 0, Y as a function of X such that $W^p_{s^0,\theta}(X,Y)=0$. We have for $k\in\{1,\ldots,f\}$:

$$\Omega^p_k(X)=c^p_{k,0}+c^p_{k,1}X^{\vartheta_{k,1}}+\cdots+c^p_{k,N}X^{\vartheta_{k,N}}+\Omega^p_{k,N+1}(X),\ (N\geq 1) \tag{8.13}$$

where $c^p_{k,m}\in\mathbf{C}$ (and depending a priori on p);
$\vartheta_{k,N}>\cdots>\vartheta_{k,1}\in\mathbf{N}^*$; $\Omega^p_{k,N+1}(X)=o\left(X^{\vartheta_{k,N}}\right)$;
and we have :

$$\forall k\in\{1,\ldots,f\},W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,\Omega^p_k(X))=0.$$

We have to notice that, according to Proposition 9 page 212, the main term $c^p_{k,0}$ of a Puiseux branch is a root of the one variable polynomial :

$$[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e(T) := 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j p^{-i\left\langle \gamma^{0(n)}, \alpha_j^{(n)}\right\rangle} T^{\left\langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)}\right\rangle}.$$

And reciprocally, again by Proposition 9 page 212, each root of this polynomial determines the initial term of a Puiseux branch of $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$.

Moreover, if to each root $c^p_{k,0}$ of $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e(T)$ we associate

$$c_{k,0} := c^p_{k,0} p^{-i\frac{\langle \gamma^{0(n)}, \alpha_e^{(n)}\rangle}{\langle \theta^{(n)}, \alpha_e^{n}\rangle}}, \tag{8.14}$$

then $|c_{k,0}| = \left|c^p_{k,0}\right|$ and $c_{k,0}$ is a root of the polynomial (not depending on p)

$$[h_\theta]_e(T) := 1 + \sum_{j\in\Lambda_e} a_j T^{\langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)}\rangle}.$$

In addition, notice that a priori $\left\langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)}\right\rangle \in \mathbf{Q}$.

However, there exists a vector $\widehat{\alpha}_e$ whose components are relatively prime and such that $\alpha_e = q_e\widehat{\alpha}_e$.

In this way, if $j \in \Lambda_e$ i.e if $\alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e$, then there exists an integer $q_j \in \mathbf{N}^*$ such that $\alpha_j = q_j\widehat{\alpha}_e$; hence it suffices to only impose that $\langle\theta, \widehat{\alpha}_e\rangle \in \mathbf{N}^*$ to have $\langle\theta, \alpha_j\rangle = \left\langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)}\right\rangle \in \mathbf{N}^*$ for all $j \in \Lambda_e$.

Notice that if $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e(T)$ is not cyclotomic, then there exists at least one root $c^p_{k,0}$ of modulus stricly less than 1 which will provide a Puiseux branch $\Omega_k(X)$ satisfying $|\Omega_k(X)| < 1$ for $|X|$ small enough.

So now treat completely this particular case where $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e(T)$ is not cyclotomic : we will prove that there are, among the two factors of $Z(\mathbf{s}^{0(n)} + t\theta^{(n)})$ which appear in the writing of Theorem 36, many more zeroes coming from the factor

$$t \longmapsto \prod_p W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(p^{-1}, p^{-t}\right) = \prod_{p\le M_\delta} h\left(p^{-s_1^0+t\theta_1}, \dots, p^{-s_n^0+t\theta_n}, p^{-c}\right)$$

than poles coming from

$$t \longmapsto \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} \left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{\ell=1}^n \langle\beta, \alpha^\ell\rangle\left(s_l^0 + t\theta_\ell\right) + c\langle\beta, \alpha^{n+1}\rangle\right)\right]^{-\gamma(\beta)}$$

for t lying inside a region $\Delta_{u,\nu,\eta}$ in a neighbourhood on the right of $\Re(t) = 0$ determined by (for $\nu, \eta, u > 0$) :

$$\Delta_{u,\nu,\eta} : \begin{array}{l} \frac{1}{\nu+1} < \Re\left(t\right) < \frac{1}{\nu} \\ 0 < u < \Im\left(t\right) < u + \eta. \end{array}$$

In this way we will show the accumulation of zeroes $t_{m,p}$ ($m \in \mathbf{Z}$, p prime) of $Z\left(\mathbf{s}^{0(n)} + t\theta^{(n)}\right) = Z^{n+1}\left(\left(\mathbf{s}^{0(n)}, c\right) + t\left(\theta^{(n)}, 0\right)\right)$ inside $\Xi_{u,\eta} = \bigcup_{\nu \geq 1} \Delta_{u,\nu,\eta}$.

We could note in passing that this particular case does not require the using of generic arguments consisting in moving if necessary the parameters σ^0, γ^0 or θ. Moreover, we can also give an estimation (in function of ν and η) of the number of zeroes $t_{m,p}$ inside $\Delta_{u,\nu,\eta}$. This is in this sense that this case is more simple than the case where $[W^p_{s^0,\theta}]_e$ is cyclotomic which will be treated later.

Lemme 33. *We suppose that $[W^p_{s^0,\theta}]_e$ is not cyclotomic.*

$\partial W\left(0\right) \cap \{s_{n+1} = c\}$ is a natural boundary for $Z\left(\boldsymbol{s}\right) = Z^{n+1}(s_1, \ldots, s_n, c)$.

In particular, the number $S(\nu, \eta)$ of zeroes $t_{m,p}$ of the form (8.12) (counted without their multiplicity) inside the region $\Delta_{\nu,\eta}$ (for $\nu, \eta, u > 0$) is such that for all $N \in \mathbf{N}$:

$$S\left(\nu, \eta\right) \geq \frac{\eta\left(C_{k_0} - 1\right)}{\mathcal{K}_N 4\pi} \nu^N,$$

where $\mathcal{K}_N$ is a constant depending on N and $C_{k_0} = \left|{c^p_{k,0}}^{-1}\right| > 1$ is the modulus of the inverse of a root $c^p_{k,0}$ of $[W^p_{s^0,\theta}]_e$ of modulus strictly less than 1.

Preuve. Firstly notice that for $\Re\left(t\right) > \delta$, the writing of Theorem 36 :

$$\begin{aligned} Z\left(\mathbf{s}^{0(n)} + t\theta^{(n)}\right) &= \prod_{p \leq M_\delta} h\left(p^{-s^0_1 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s^0_n - t\theta_n}, p^{-c}\right) \\ &\quad \prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{\ell=1}^{n} \langle \beta, \alpha^\ell \rangle \left(s^0_l + t\theta_\ell\right) + c\langle \beta, \alpha^{n+1} \rangle\right)\right]^{-\gamma(\beta)} \end{aligned}$$

makes sense because :

$$\forall j \in \{1 \ldots, r\}, \langle \sigma^0 + \Re\left(t\right)\theta, \alpha_j \rangle \geq \Re\left(t\right) \langle \theta, \alpha_j \rangle > \delta \langle \theta, \alpha_j \rangle \geq \delta \text{ according to (8.5).}$$

Consider the zeroes and the poles of $Z\left(\mathbf{s}^{0(n)} + t\theta^{(n)}\right)$ inside the rectangle (for $\nu, \eta, u > 0$) :

$$\Delta_{u,\nu,\eta} : \begin{array}{l} \frac{1}{\nu+1} < \Re\left(t\right) < \frac{1}{\nu} \\ 0 < u < \Im\left(t\right) < u + \eta. \end{array}$$

Firstly let us estimate the number of possible poles inside $\Delta_{\nu,\eta}$ coming from the factor $\prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\left[\zeta_{M_{\frac{1}{\nu+1}}}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\left(s_l^0+t\theta_\ell\right)+c\langle\beta,\alpha^{n+1}\rangle\right)\right]^{-\gamma(\beta)}$.

Recall (see Theorem 36) that $\zeta_{M_{\frac{1}{\nu+1}}}$ has exactly the same zeroes and poles as the Riemann zeta function ζ.

If t_0 is a such pole inside $\Delta_{u,\nu,\eta}$, then there exists $\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}$ such that $\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\left(s_\ell^0+t_0\theta_\ell\right)+c\langle\beta,\alpha^{n+1}\rangle$ is a zero or a pole of the Riemann zeta function ζ ; and this quantity satisfies necessarily :

$$\Re\left(t_0\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\theta_\ell\right)\leq\Re\left(\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\left(s_\ell^0+t_0\theta_\ell\right)+c\langle\beta,\alpha^{n+1}\rangle\right)\leq 1$$

$$\left(\text{because }\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle s_\ell^0+c\langle\beta,\alpha^{n+1}\rangle=\sum_{j=1}^{r}\beta_j\left\langle\left(\mathbf{s}^{0(n)},c\right),\alpha_j\right\rangle\geq 0\right).$$

Consequently :

$$\frac{1}{\nu+1}<\Re\left(t_0\right)\leq\frac{1}{\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\theta_\ell};$$

which provides :

$$\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\theta_\ell\leq(\nu+1).$$

However

$$\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\theta_\ell=\sum_{j=1}^{r}\beta_j\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle\geq\|\beta\|\quad\text{(according to (8.5))},$$

Thus :

$$\|\beta\|\leq(\nu+1). \tag{8.15}$$

Moreover,

$$\Im\left(t_0\right)<u+\eta$$

gives :

$$\Im\left(\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\left(s_\ell^0+t_0\theta_\ell\right)+c\langle\beta,\alpha^{n+1}\rangle\right)=O\left((\nu+1)\left(u+\eta\right)\right).$$

So having fixed $\eta>0$, the number of zeroes or poles of one ζ-factor of $\prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\left[\zeta_{M_{\frac{1}{\nu+1}}}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\left(s_l^0+t\theta_\ell\right)+c\langle\beta,\alpha^{n+1}\rangle\right)\right]^{-\gamma(\beta)}$ is given by :

$$O\left((\nu+1)\log\left(\nu+1\right)\right),$$

according to a classical result concerning the estimation of the number of nontrivial zeroes of the Riemann zeta function of imaginary part less than $(\nu+1)$.

In addition, the same pole can, by (8.15), appear in at most $(\nu+1)^r$ terms; which gives at most :

$$O\left((\nu+1)^{r+1}\log(\nu+1)\right)$$

poles inside $\Delta_{\nu,\eta}$ (counted without their multiplicity).

On the other hand, let us estimate the number of zeroes $S(\nu,\eta)$ coming from $\prod_{p\leq M_{\frac{1}{\nu+1}}} h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n},p^{-c}\right)=\prod_{p\leq M_{\frac{1}{\nu+1}}} W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(p^{-1},p^{-t}\right)$ inside $\Delta_{\nu,\eta}$.

We consider for this the Puiseux branches $\Omega_k^p(X)$ of $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)$ in the neighbourhood of $X=0$ ($X\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-$) of the form (8.13).

We verify that the first term $c^p_{k,0}$ of these branches is a root of $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e(T)$ and that reciprocally each root of this polynomial determine the main term of a Puiseux branch (see Proposition 9 page 212). And since by hypothesis $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e(T)$ is not cyclotomic, there exists a root $c^p_{k,0}$ of modulus stricly less than 1.

Then consider in particular a Puiseux branch $\Omega^p_{k_0}(X)$ having this first term $c^p_{k,0}:=c^p_{k_0}$ with $\left|c^p_{k_0}\right|<1$ and put $C_{k_0}=|c^p_{k_0}|^{-1}>1$.

For p prime we write :

$$\Omega^p_{k_0}\left(p^{-1}\right)=c^p_{k_0}+c^p_{k_0,1}p^{-\vartheta_{k_0}}+\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right).$$

Thus, some zeroes of $t\longmapsto W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(p^{-1},p^{-t}\right)$ for p prime can be expressed as follows :

$$t_{m,p}=-\frac{\log\left(c^p_{k_0}+c^p_{k_0,1}p^{-\vartheta_{k_0}}+\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)\right)}{\log(p)}+\frac{2\pi mi}{\log(p)} \tag{8.16}$$

where $m\in\mathbf{Z}$.

To have $t_{m,p}\in\Delta_{\nu,\eta}$, we must have :

$$\frac{1}{\nu+1}<-\frac{\log\left|c^p_{k_0}+c^p_{k_0,1}p^{-\vartheta_{k_0}}+\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)\right|}{\log(p)}<\frac{1}{\nu}. \tag{8.17}$$

Let us prove that this inequality is well satisfied for p lying in a suitable interval.

Firstly we can assume that $\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\neq 0$: this property which exploits the genericity in γ^0 will be proved in Lemma 34 page 271. (8.18)

Thus there exists $p_0\in\mathbf{N}$ such that for $p>p_0$ we have either :

$$\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|>1\ \text{ if } \Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)>0; \tag{8.19}$$

or :

$$\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|<1 \text{ if } \Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)<0. \tag{8.20}$$

In (8.19) or (8.20) for ν large enough and

$$\begin{aligned} p &> \max\left(\left[4\nu\left|\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\right|\left(C^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}_{k_0}\right)^{\nu}\right]^{\frac{1}{\vartheta_{k_0}}},\left[4\left(\nu+1\right)\left|\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\right|\left(C^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}_{k_0}\right)^{\nu+1}\right]^{\frac{1}{\vartheta_{k_0}}}\right) \\ &= \left[4\left(\nu+1\right)\left|\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\right|\left(C^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}_{k_0}\right)^{\nu+1}\right]^{\frac{1}{\vartheta_{k_0}}} \end{aligned}$$

(which is possible according to Proposition 9 page 212 because $|c^p_{k,0}|=|c_{k,0}|>0$ and $|c^p_{k,1}|$ is bounded independently of p), we obtain :

$$(-1)^{\varepsilon}\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu-\varepsilon}<\frac{1+(-1)^{\varepsilon}\left(C^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}_{k_0}\right)^{\nu+\varepsilon}}{\left(C^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}_{k_0}\right)^{\nu+\varepsilon}} \tag{8.21}$$

where $\varepsilon\in\{0,1\}$.

Indeed, (8.19) gives :

1. pour $\varepsilon=0$:

$$\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu}<1<\frac{1+\left(C^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}_{k_0}\right)^{\nu}}{\left(C^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}_{k_0}\right)^{\nu}};$$

2. for $\varepsilon=1$, since $p>\left[4\left(\nu+1\right)\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\left(C^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}_{k_0}\right)^{\nu+1}\right]^{\frac{1}{\vartheta_{k_0}}}$:

$$
\begin{aligned}
& \log\left|1+\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\tfrac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu-1} \\
= & \left(\left(1+\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\tfrac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right)\overline{\left(1+\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\tfrac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right)}\right)^{\frac{-\nu-1}{2}} \\
= & \log\left(1+2\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0},1}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}}+o\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\right)^{\frac{-\nu-1}{2}} \\
= & \tfrac{-\nu-1}{2}\left(2\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0},1}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}}+o\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\right) \\
> & -2\left(\nu+1\right)\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0},1}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}} \text{ for } \nu \text{ large enough } \left(\nu\geq\nu_0\right) \\
> & -\tfrac{1}{2}\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}} \\
> & \log\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}\right)=-\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}+o\left(\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}\right);
\end{aligned}
$$

which provides the inequality desired (for $\nu \geq \nu_0$) :

$$
\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu-1}>1-\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{-1-\nu}=\frac{-1+\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{1+\nu}}{\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{1+\nu}}.
$$

Similarly, (8.20) gives :

1. for $\varepsilon=0$, since $p>\left[-4\nu\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu}\right]^{\frac{1}{\vartheta_{k_0}}}$:

$$
\begin{aligned}
& \log\left|1+\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\tfrac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu} \\
= & \tfrac{\nu}{2}\left(-2\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}}+o\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\right) \\
< & 2\nu\left(-\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}}\right) \text{ for } \nu \text{ large enough } \left(\nu\geq\nu_1\right) \\
< & \frac{1}{2C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}} \\
< & \log\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}\right)=\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}+o\left(\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}\right);
\end{aligned}
$$

which guarantees (for $\nu \geq \nu_1$) :

$$\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu}<1+\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}.$$

2. for $\varepsilon = 1$:

$$\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu-1}>1>1-\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}=\frac{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}-1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}.$$

Now if we choose :

$$C^\nu_{k_0}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\leq p\leq C^{\nu+1}_{k_0}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right),$$

(which is compatible with the previous condition on p to have (8.21)) then (8.17) occurs since according to (8.21) we have :

$$\begin{aligned}
C^\nu_{k_0}\left|1+\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\tfrac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu} &< C^\nu_{k_0}\left(1+\tfrac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\\
&\leq p\\
&\leq C^{\nu+1}_{k_0}\left(1-\tfrac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\\
&< C^{\nu+1}_{k_0}\left|1+\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\tfrac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu-1};
\end{aligned}$$

and finally by taking the logarithm of both sides we deduce (8.17).

Now, $\eta > 0$ being fixed, if we choose ν as a positive integer such that $\frac{2\pi}{\log\left(C^\nu_{k_0}+1\right)} < \eta$, then for all prime number p such that :

$$C^\nu_{k_0}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\leq p\leq C^{\nu+1}_{k_0}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right),$$

we will have $t_{m,p} \in \Delta_{\nu,\eta}$ if and only if :

$$u<\frac{2\pi m}{\log\left(p\right)}-\frac{\arg\left(\Omega^p_{k_0}\left(p^{-1}\right)\right)}{\log\left(p\right)}<u+\eta,$$

which is equivalent to :

$$\frac{u\log(p)}{2\pi}+\frac{\arg\left(\Omega_{k_0}^{p}\left(p^{-1}\right)\right)}{2\pi}<m<\frac{(u+\eta)\log(p)}{2\pi}+\frac{\arg\left(\Omega_{k_0}^{p}\left(p^{-1}\right)\right)}{2\pi}. \tag{8.22}$$

Hence we will have for a fixed p $\frac{\eta\log(p)}{2\pi}+\varpi$ zeroes $t_{m,p}$ of $W_{\mathbf{s}^0,\theta}^{p}\left(p^{-1},p^{-t}\right)$ inside $\Delta_{\nu,\eta}$ where $|\varpi|\leq 1$.

Finally, if $S^*(\nu,\eta)$ denotes the number of zeroes of $\prod_{p\leq M_{\frac{1}{\nu+1}}} h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n},p^{-c}\right)$ inside $\Delta_{\nu,\eta}$ a priori counted with their multiplicity, we will have :

$$S^*(\nu,\eta)\geq\sum_{C_{k_0}^{\nu}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\leq p\leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)}\left(\frac{\eta\log(p)}{2\pi}+\varpi\right). \tag{8.23}$$

By taking ν large enough so that $C_{k_0}^{-\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}<\frac{C_{k_0}-1}{2\left(C_{k_0}^{1-\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}+1\right)}$ and by using the prime number theorem (i.e. $\sum_{p\leq x}\log(p)\sim x$), (8.23) gives :

$$\begin{aligned}
S^*(\nu,\eta) &\geq \frac{C_{k_0}^{\nu}\eta\left(C_{k_0}-1\right)}{4\pi}-\sum_{C_{k_0}^{\nu}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\leq p\leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)} 1\\
&\geq \frac{C_{k_0}^{\nu}\eta\left(C_{k_0}-1\right)}{4\pi}-\frac{C_{k_0}^{\nu+1}}{\log\left(C_{k_0}^{\nu+1}\right)}\\
&\sim \frac{C_{k_0}^{\nu}\eta\left(C_{k_0}-1\right)}{4\pi}.
\end{aligned}$$

To be able to minorate $S(\nu,\eta)$, we want to majorate the multiplicity of a zero or a pole $t_{m,p}$.

Thus given a prime number p and an integer m, we want majorate :

$$\mathcal{M}(m,p)=\#\left\{(m',p')\mid m'\in\mathbf{Z},p'\text{ prime, }t_{m,p}=t_{m',p'}\right\}.$$

Notice that we can suppose without loss of generality that if p' is such that there exists an integer m such that $t_{m,p}=t_{m',p'}$, then $p'\geq p$.

In addition we have :

$$\begin{aligned} -\log \Omega^{p}_{k_0}\left(p^{-1}\right) &= -\log\left(c^{p}_{k_0}\right) + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right);\\ -\log \Omega^{p}_{k_0}\left(p'^{-1}\right) &= -\log\left(c^{p'}_{k_0}\right) + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right). \end{aligned} \tag{8.24}$$

Furthermore by (8.14) we can write for all prime number p

$$c^{p}_{k_0} = c_{k_0} p^{i\frac{\left\langle \gamma^{0(n)}, \alpha_e^{(n)}\right\rangle}{\left\langle \theta^{(n)}, \alpha_e^{(n)}\right\rangle}},$$

where c_{k_0} does not depend on p.

We remark also that $\Re\left(\log\left(c_{k_0}\right)\right) = \log\left|c_{k_0}\right| \neq 0$ because $\left|c_{k_0}\right| = \left|c^{p}_{k_0}\right| < 1$.

According to (8.24), the equality $t_{m,p} = t_{m',p'}$ provides :

$$\frac{-\log\left(c_{k_0}\right) + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)}{\log(p)} + \frac{2i\pi m}{\log(p)} = \frac{-\log\left(c_{k_0}\right) + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)}{\log(p')} + \frac{2i\pi m'}{\log(p')}. \tag{8.25}$$

By identifying the real and the imaginary parts of (8.25), we obtain the estimations :

$$\begin{cases} -\log\left|c_{k_0}\right|\left(\dfrac{1}{\log(p)} - \dfrac{1}{\log(p')}\right) & = O\left(\dfrac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log(p)}\right),\\ -\arg\left(c_{k_0}\right)\left(\dfrac{1}{\log(p)} - \dfrac{1}{\log(p')}\right) + 2\pi\left(\dfrac{m}{\log(p)} - \dfrac{m'}{\log(p')}\right) & = O\left(\dfrac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log(p)}\right). \end{cases}$$

And since $\log\left|c_{k_0}\right| \neq 0$, we have :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\log(p)} - \dfrac{1}{\log(p')} & = O\left(\dfrac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log(p)}\right),\\ \dfrac{m}{\log(p)} - \dfrac{m'}{\log(p')} & = O\left(\dfrac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log(p)}\right). \end{cases} \tag{8.26}$$

The first line of (8.26) permits to claim that :

$$\log(p') - \log(p) = O\left(\frac{\log(p')}{p^{\vartheta_{k_0}}}\right).$$

Consequently there exists an absolute constant A_1 such that if p' is such that there exists m' verifying $t_{m',p'} = t_{m,p}$ then :

$$\log(p') - \log(p) \leq A_1 \frac{\log(p')}{p^{\vartheta_{k_0}}}.$$

So we have :

$$\log(p') \leq \frac{\log(p)}{1-\frac{A_1}{p^{\vartheta_{k_0}}}} \leq \log(p)\left(1+\frac{A_2}{p^{\vartheta_{k_0}}}\right);$$

where A_2 is an absolute constant (we can for example choose $A_2 = 2A_1$).

If there exists m' such that $t_{m',p'} = t_{m,p}$, then p' satisfies necessarily

$$p' \leq p^{1+\frac{A_2}{p^{\vartheta_{k_0}}}}. \tag{8.27}$$

For a fixed p, let us count the number $\mathcal{M}'(p)$ of p' satisfying (8.27).

For this we use the prime number theorem which gives the following estimation for the number of prime numbers $\pi(x)$ less than x :

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)} + O\left(xe^{-c\sqrt{\log(x)}}\right);$$

where c is an explicit absolute constant.

Hence we obtain :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}'(p) &= \pi\left(p^{1+A_2p^{-\vartheta_{k_0}}}\right) - \pi(p) \\
&= \int_2^{p^{1+A_2p^{-\vartheta_{k_0}}}} \frac{dt}{\log(t)} + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right).
\end{aligned}$$

But we have uniformly in $t \in \left[p, p^{1+A_2p^{-\vartheta_{k_0}}}\right]$:

$$\log(t) = \log(p) + O\left(\log(p)\,p^{-\vartheta_{k_0}}\right);$$

which provides :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}'(p) &= \frac{1}{\log(p) + O\left(\log(p)\,p^{-\vartheta_{k_0}}\right)}\left(p^{1+A_2p^{-\vartheta_{k_0}}} - p\right) + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right) \\
&= O\left(\frac{p}{\log(p)}\left(p^{A_2p^{-\vartheta_{k_0}}} - 1\right)\right) + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right) \\
&= O\left(\frac{p}{\log(p)}\left(e^{A_2\log(p)p^{-\vartheta_{k_0}}} - 1\right)\right) + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right) \\
&= O\left(p^{1-\vartheta_{k_0}}\right) + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right) \\
&= O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right).
\end{aligned}$$

Now, having fixed an integer $m \in \mathbf{Z}$ and a prime number p, consider a prime number p' verifying (8.27) and let us estimate the number of integers m' such that $t_{m,p} = t_{m',p'}$.

According to (8.26), we have :

$$\frac{m}{\log(p)} - \frac{m'}{\log(p')} = O\left(\frac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log(p)}\right).$$

But since p' verifies (8.27), we have :

$$\log(p') = \log(p) + O\left(\log(p)\, p^{-\vartheta_{k_0}}\right);$$

and consequently :

$$\begin{array}{lll} m - m'\dfrac{\log(p)}{\log(p')} & = & O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right) \\ m - m'\left(\dfrac{1}{1+O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)}\right) & = & O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right) \\ m - m'\left(1+O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\right) & = & O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right) \\ m - m' & = & O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right) + O\left(m'p^{-\vartheta_{k_0}}\right). \end{array}$$

Moreover, if $t_{m',p'} \in \Delta_{\nu,\eta}$, then by (8.22) m' must verify :

$$m' = O\left(\log(p')\right) = O\left(\log(p)\right);$$

hence :

$$m - m' = O\left(\log(p)\, p^{-\vartheta_{k_0}}\right).$$

In particular, for p large enough, $p > p_1$ (p_1 being an absolute constant), we deduce :

$$|m - m'| < \frac{1}{2};$$

and :

$$m = m'.$$

Hence if $p > p_1$, the couples (m', p') such that $t_{m',p'} = t_{m,p}$ are necessarily such that $m = m'$.

And finally :

$$\mathcal{M}(m,p) = \mathcal{M}'(p) = O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right).$$

To conclude, if p is such that $C_{k_0}^{\nu}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right) \leq p \leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)$, then for all $N \in \mathbf{N}$, there exists in particular a constant $\mathcal{K}_N$ which depends on N such that for all $m \in \mathbf{N}$:

$$\mathcal{M}(m,p) \leq \mathcal{K}_N \frac{C_{k_0}^{\nu}}{\nu^N}.$$

Thus for all $N \in \mathbf{N}$, we have finally :

$$S(\nu,\eta) \geq \frac{S^*(\nu,\eta)}{\mathcal{K}_N \frac{C_{k_0}^{\nu}}{\nu^N}} \sim \frac{\eta\left(C_{k_0}-1\right)}{\mathcal{K}_N 4\pi}\nu^N.$$

For $N > r+1$, we have in particular that $(\nu+1)^{r+1}\log(\nu+1) = o\left(S(\nu,\eta)\right)$ when ν tends to infinity ; which completes the proof of this lemma. □

The case where $[W^p_{s^0,\theta}]_e(T)$ is not cyclotomic being now completely treated, we assume from now on that $[W^p_{s^0,\theta}]_e(T)$ is cyclotomic.

The problem is more complicated when the polynomial $[W^p_{s^0,\theta}]_e(T)$ is cyclotomic.

We take up again, step by step, the argumentation of Chapter 7 which consists in finding, by choosing a suitable θ, two Puiseux series of opposite initial term $\pm c^p_{k,0}$ with the same second term $c^p_{k,1}X^{\vartheta_{k,1}}$. In this way, although it is not possible to have $\left|c^p_{k,0}\right| < 1$ since here $[W_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$ is cyclotomic, one of these two branches will be of modulus stricly less than 1 for $X > 0$ small enough whenever $\arg\left(\frac{c^p_{k,1}}{c^p_{k,0}}\right) \neq \frac{\pi}{2}$. This is the reason why we use an argument of genericity in the imaginary part $\gamma^0 = \left(\gamma^{0(n)},0\right)$ of $\mathbf{s}^0$ to ensure

$$\arg\left(\frac{c^p_{k,1}}{c^p_{k,0}}\right) \neq \frac{\pi}{2} \mod (\pi).$$

Firstly consider a particular index $e' \in \{1,\ldots,r\}$ verifying :

$$\langle\sigma^0,\alpha_{e'}\rangle > 0 \text{ is minimal.} \tag{8.28}$$

among the $\langle\sigma^0,\alpha_{j_0}\rangle > 0$ verifying $\sum_{\{j:\alpha_j-\alpha_{j_0}\in\mathbf{Q}\alpha_e\}} a_j p^{-i\langle\gamma^{0(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle} {c^p_{k,0}}^{\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle} \neq 0$.

Contrary to Chapter 7, we must notice here a difficulty coming from the fact that $\theta_{n+1} = 0$.

Indeed, in whole the following, we need (notably in the proof of Lemma 35) that $\theta = \left(\theta^{(n)},0\right) \in \mathbf{Q}^n \times \{0\}$ verifies, in addition of (8.5), the two following conditions :

$$\begin{aligned} &\langle\theta^{(n)},\widehat{\alpha_e}^{(n)}\rangle \in \mathbf{Z}_+ \text{ is even;} \\ &\langle\theta^{(n)},\alpha_{e'}^{(n)}\rangle \in \mathbf{Z}_+ \text{ is odd.} \end{aligned} \tag{8.29}$$

But, *although the vectors α_e and $\alpha_{e'}$ are not collinear (according to (8.4) since $\langle\sigma^0,\alpha_e\rangle = 0$ and $\langle\sigma^0,\alpha_{e'}\rangle > 0$), it would be possible to have $\alpha_{e'}^{(n)} \in \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$* ; and in this case it would be not possible to choose such θ with $\theta_{n+1} = 0$ verifying (8.29).

To escape this difficulty, *we use the hypothesis (H)* of Theorem 33 which, because we know that α_e and $\alpha_{e'}$ are not collinear, ensures that $\alpha_{e'}^{(n)} \notin \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$; and consequently it is possible to find $\theta = \left(\theta^{(n)}, 0\right)$ verifying (8.29).

The same difficulty occurs also in the proof of the following lemma :

Lemme 34. *Let $\Omega_k^p(X) = c_{k,0}^p + c_{k,1}^p X^{\vartheta_{k,1}} + o\left(X^{\vartheta_{k,1}}\right)$ be a Puiseux branch of initial term $c_{k,0}^p$, root of $[W_{s^0,\theta}^p]_e$.*

Moving generically $\gamma^{0(n)} \in \mathbf{R}^n$ so that $\boldsymbol{s}^{0(n)} \in \mathcal{B} \cap \partial W_c(0)$ if necessary, we can assume

$$\arg\left(\frac{c_{k,1}^p}{c_{k,0}^p}\right) \neq \frac{\pi}{2} \mod (\pi).$$

Remarque 35. This lemma does not require the hypothesis that $[W_{s^0,\theta}^p]_e(T)$ is cyclotomic; moreover this resut is used in the proof of Lemma 33 page 260 (see (8.18) page 262).

Preuve. To begin we express $c_{k,1}^p$ as a function of p, of $\gamma^{0(n)}$ and of $c_{k,0}^p$. For this it suffices to carry out the first step of the Puiseux algorithm. Indeed, firstly we put $\Omega_k^p(X) := c_{k,0}^p + c_{k,1}^p\phi(X)$ ($\phi(0) = 0$); and we determine $c_{k,1}^p$ from the identity

$$W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p\left(X, c_{k,0}^p + c_{k,1}^p\phi(X)\right) = 0 \text{ for all } X > 0 \text{ in a neighbourhood of } 0 \qquad (8.30)$$

by using the fact that the terms of lowest degree of (8.30) must cancel out.

In this way, we obtain the following expression for $c_{k,1}^p$ (see Lemma 29 of Chapter 7 for the explicit calculation) :

$$c_{k,1}^p = \frac{-\sum_{j|\alpha_j-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e} a_j p^{-i\langle\gamma^{0(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}\left(c_{k,0}^p\right)^{\left\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\right\rangle}}{[W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p]_e'\left(c_{k,0}^p\right)}.$$

Recall that we have according to (8.14) :

$$c_{k,0}^p = c_{k,0}p^{i\frac{\langle\gamma^{0(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}{\langle\theta^{(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}};$$

which permits to clearly identify the dependence on p and in $\gamma^{0(n)}$ of $c_{k,0}^p$.

Observe in particular the denominator $c_{k,0}^p[W_{\mathbf{s}^0,\theta}^p]_e'\left(c_{k,0}^p\right)$ of $\frac{c_{k,1}^p}{c_{k,0}^p}$ and prove that it does not depend neither on $\gamma^{0(n)}$, nor on p.

Indeed :

$$\begin{aligned} c^p_{k,0}[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]'_e\left(c^p_{k,0}\right) &= c_{k,0}p^{i\frac{\langle\gamma^{0(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}{\langle\theta^{(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}} \\ &\quad \sum_{j\in\Lambda_e} a_j\langle\theta,\alpha_j\rangle c_{k,0}^{\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle-1} p^{i\left(\frac{\langle\gamma^{0(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}{\langle\theta^{(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}\left(\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle-1\right)-\langle\gamma^{0(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle\right)} \\ &= \sum_{j\in\Lambda_e} a_j\langle\theta,\alpha_j\rangle c_{k,0}^{\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}, \end{aligned}$$

since $j\in\Lambda_e$ implies that $\frac{\langle\gamma^{0(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}{\langle\theta^{(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle}\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle = \langle\gamma^{0(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle$.

Now assume by absurd that for all $\gamma^{0(n)}\in\mathbf{R}^n$ so that $\mathbf{s}^{0(n)}\in\mathcal{B}\cap\partial W_c(0)$ and for all prime number p

$$\arg\left(\frac{c^p_{k,1}}{c^p_{k,0}}\right) = \frac{\pi}{2} \mod (\pi).$$

Then we would have

$$\arg\left(\frac{c^p_{k,1}}{c^p_{k,0}}\right) \in \left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}.$$

Put for k such that $\alpha_k\in\alpha_{e'}+\mathbf{Q}\alpha_e$:

$$\lambda_k := \frac{-\ a_k\ c_{k,0}^{\left\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\right\rangle}}{\sum_{j\in\Lambda_e} a_j\langle\theta,\alpha_j\rangle c_{k,0}^{\left\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\right\rangle}} \in \mathbf{C}$$

not depending neither on p nor on $\gamma^{0(n)}$.

then we have :

$$\begin{aligned} \frac{c^p_{k,1}}{c^p_{k,0}} &= \sum_{\{k:\alpha_k-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e\}} \lambda_k p^{i\left(\left\langle\gamma^{0(n)},\alpha_e^{(n)}\right\rangle\frac{\left\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\right\rangle}{\left\langle\theta^{(n)},\alpha_e^{(n)}\right\rangle}-\left\langle\gamma^{0(n)},\alpha_k^{(n)}\right\rangle\right)} \\ &= \sum_{\{k:\alpha_k-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e\}} \lambda_k p^{i\left\langle\gamma^{0(n)},w_k\right\rangle}, \end{aligned}$$

if we write

$$w_k := \frac{\left\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\right\rangle}{\left\langle\theta^{(n)},\alpha_e^{(n)}\right\rangle}\alpha_e^{(n)} - \alpha_k^{(n)}.$$

Remark that these w_k are all equal. Indeed if k,k' are such that $\alpha_k-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e$ and $\alpha_{k'}-\alpha_{e'}\in\mathbf{Q}\alpha_e$, then $\alpha_k-\alpha_{k'}\in\mathbf{Q}\alpha_e$ and hence there exists $q\in\mathbf{Q}$ such that :

$$\alpha_k-\alpha_{k'} = q\alpha_e.$$

In particular we also have $\alpha_k^{(n)} - \alpha_{k'}^{(n)} = q\alpha_e^{(n)}$; consequently

$$\frac{\left\langle \theta^{(n)}, \alpha_k^{(n)} - \alpha_{k'}^{(n)} \right\rangle}{\left\langle \theta^{(n)}, \alpha_e^{(n)} \right\rangle} \alpha_e^{(n)} = q\alpha_e^{(n)} = \alpha_k^{(n)} - \alpha_{k'}^{(n)};$$

and hence $w_k = w_{k'} = w_{e'}$.

Prove in addition that $w_{e'} \neq \boldsymbol{0}$ *: this property is crucial if we want move* $\arg\left(\frac{c_{k,1}^p}{c_{k,0}^p}\right)$ *by choosing* $\gamma^{0(n)}$ *generically. It is exactly here that we use again the hypothesis (H) of theorem 33.*

Indeed, $w_{e'} = \mathbf{0}$ is equivalent to $\alpha_{e'}^{(n)} \in \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$. But we know that the vectors α_e and $\alpha_{e'}$ are not collinear $\langle \sigma^0, \alpha_{e'} \rangle > 0$ and that $\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle = 0$ if and only if $\alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e$ according to the genericity condition (8.3) on $\sigma^0 = \left(\sigma^{0(n)}, c\right)$.

And consequently the hypothesis (H) ensures that $\alpha_{e'}^{(n)} \notin \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$ and hence that $w_{e'} \neq \mathbf{0}$.

Finally we have :

$$\frac{c_{k,1}^p}{c_{k,0}^p} = p^{i\left\langle \gamma^{0(n)}, w_{e'} \right\rangle} \sum_{k \mid \alpha_k - \alpha_{e'} \in \mathbf{Q}\alpha_e} \lambda_k.$$

Now if we put

$$\varphi := \arg\left(\sum_{k \mid \alpha_k - \alpha_{e'} \in \mathbf{Q}\alpha_e} \lambda_k \right);$$

(φ not depending neither on p nor on $\gamma^{0(n)}$), then we obtain :

$$\gamma^{0(n)} \in M := \bigcup_p \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \left\langle \gamma^{0(n)}, w_{e'} \right\rangle \log(p) + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}.$$

But M is a countable union of affine hyperplanes in $\gamma^{0(n)}$ which are of empty interior inside $\mathbf{R}^n$ (*because* $w_{e'} \neq \boldsymbol{0}$) ; and according to Baire's theorem the countable union of these hyperplanes is also of empty interior inside $\mathbf{R}^n$.

Consequently these previous conditions cannot be satisfied for all $\gamma^{0(n)}$ contained inside an open ball of $\mathbf{R}^n$; and we obtain a contradiction to the hypothesis above, which completes the proof of this lemma. $\square$

The lemma that we have just proved permits to show the following fondamental result concerning the accumulation of the zeroes $t_{m,p}$ of positive real part inside $\Xi_{u,\eta}$.

Lemme 35. *We assume that $[W^p_{s^0,\theta}]_e$ is a cyclotomic polynomial.*
There exists a Puiseux branch $\Omega^p_k(X)$, solution of $W^p_{s^0,\theta}(X,Y)=0$, verifying

$$|\Omega^p_k(X)| < 1 \text{ for } X > 0 \text{ in a neighbourhood of } 0;$$

and which procides infinitely many zeroes $t_{m,p} \in \Xi_{u,\eta}$ of $t \longmapsto \prod_{p\leq M_\delta} h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0-t\theta_n}, p^{-c}\right)$.

Preuve. See Lemma 29 of Chapter 7.

Now it remains to verify that the accumulation of zeroes $t_{m,p}$ lying inside $\Xi_{u,\eta}$ is not cancelled by possible poles coming from the ζ-factors of $\prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{\ell=1}^n \langle\beta,\alpha^\ell\rangle\left(s_l^0+t\theta_\ell\right)+c\langle\beta,\alpha^{n+1}\rangle\right)\right]^{-\gamma(\beta)}$ which appear in the writing of Theorem 36.

Firstly remark that, since ζ_{M_δ} has exactly the same zeroes and pole as the Riemann zeta function, the possible poles which could cancel the previous zeroes $t_{m,p}$ are of the form :

$$t\left(\beta,\rho\right) = \frac{\rho - \sum_{j=1}^r \beta_j\langle \mathbf{s}^0, \alpha_j\rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j\langle\theta,\alpha_j\rangle},$$

where $\beta \in \mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}$ and ρ is a zero or a pole of ζ.

In the following we will prove, moving $\mathbf{s}^{0(n)} \in \mathcal{B}\cap\partial W_c(0)$ if necessary, there is at most a finite number of such $t(\beta,\rho)$ inside the region $\Xi_{u,\eta}$; and consequently they cannot cancel the accumulation of $t_{m,p}\in\Xi_{u,\eta}$.

So we will consider for all $\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}$, for all prime number p and for all ρ zero or pole of ζ the following quantity :

$$h\left(p^{-s_1^0-t(\beta,\rho)\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0-t(\beta,\rho)\theta_n}, p^{-c}\right);$$

and we will prove that for almost all the $t(\beta,\rho)\in\Xi_{u,\eta}$ (all except a finite number) and for all prime number p large enough ($p>p_0$ where p_0 is an absolute constant) we have :

$$h\left(p^{-s_1^0-t(\beta,\rho)\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0-t(\beta,\rho)\theta_n}, p^{-c}\right) \neq 0.$$

Write :

$$\begin{aligned} h\left(p^{-s_1^0-t(\beta,\rho)\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0-t(\beta,\rho)\theta_n}, p^{-c}\right) &= 1+\sum_{k=1}^r a_k p^{-\langle\mathbf{s}^0,\alpha_k\rangle-\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}\rangle\left(\frac{\rho-\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\mathbf{s}^0,\alpha_j\rangle}{\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle}\right)} \\ &= 1+\sum_{k=1}^r a_k p^{\lambda_k(\sigma^0)} \end{aligned}$$

where

$$\lambda_k(\sigma^0) = \lambda_{\theta,\beta,k}(\sigma^0) = -u_k(\sigma^0) - v_k;$$

with

$$u_k(\sigma^0) = u_{\theta,\beta,k}(\sigma^0) = \langle \sigma^0, \alpha_k \rangle - \langle \theta^{(n)}, \alpha_k^{(n)} \rangle \frac{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle}{\sum_{j=1}^r \langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle}$$

and

$$v_k = v_{\theta,\beta,k,\rho} = \langle \theta^{(n)}, \alpha_k^{(n)} \rangle \left(\frac{\rho - i \sum_{j=1}^r \beta_j \langle \gamma^{0(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle}{\sum_{j=1}^r \langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} \right) + i \langle \gamma^{0(n)}, \alpha_k^{(n)} \rangle; \tag{8.31}$$

is independent of σ^0.

Let us precise the dependence of u_k on σ^0.

Indeed, the $(n+1)$-uple σ^0 has here two constraints : $\sigma^0_{n+1} = c$ and $\langle \sigma^0, \alpha_e \rangle = 0$. Thus we can consider this $(n+1)$-uple $\widetilde{\sigma}^0 = \left(\widetilde{\sigma}^0_1, \dots, \widetilde{\sigma}^0_{n-1}\right)$ as a $(n-1)$-uple without constraint by putting (supposing without loss of generality that $\alpha_e^n \neq 0$) :

$$\begin{cases} \sigma^0_\ell = \widetilde{\sigma}^0_\ell & (\ell \in \{1, \dots, n-1\}), \\ \sigma^0_n = -\dfrac{1}{\alpha_e^n} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_e^i \widetilde{\sigma}^0_i + c\ \alpha_e^{n+1} \right) & . \end{cases}$$

In this way we obtain :

$$\begin{aligned} u_k(\widetilde{\sigma}^0) &= \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{\sigma}^0_i \left(\alpha_k^i - \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j^i \frac{\langle \theta^{(n)}, \alpha_k^{(n)} \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n} \left(\alpha_k^n - \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j^n \frac{\langle \theta^{(n)}, \alpha_k^{(n)} \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} \right) \right) \\ &\quad + c \left(\alpha_k^{n+1} - \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j^{n+1} \frac{\langle \theta^{(n)}, \alpha_k^{(n)} \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} - \frac{\alpha_e^{n+1}}{\alpha_e^n} \left(\alpha_k^n - \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j^n \frac{\langle \theta^{(n)}, \alpha_k^{(n)} \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} \right) \right) \\ &= u_k(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}} + u_{k\mathrm{aff}}; \end{aligned}$$

where

$$u_k(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}} := \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{\sigma}^0_i \left(\alpha_k^i - \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j^i \frac{\langle \theta^{(n)}, \alpha_k^{(n)} \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n} \left(\alpha_k^n - \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j^n \frac{\langle \theta^{(n)}, \alpha_k^{(n)} \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} \right) \right) \tag{8.32}$$

and

$$u_{k\mathrm{aff}} := c \left(\alpha_k^{n+1} - \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j^{n+1} \frac{\langle \theta^{(n)}, \alpha_k^{(n)} \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} - \frac{\alpha_e^{n+1}}{\alpha_e^n} \left(\alpha_k^n - \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j^n \frac{\langle \theta^{(n)}, \alpha_k^{(n)} \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} \right) \right). \tag{8.33}$$

Then we define the following equivalence relation $\mathcal{R}_{\beta,\theta}$ on the α_k

$$\alpha_k \ \mathcal{R}_{\beta,\theta} \ \alpha_{k'} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{for all } \widetilde{\sigma}^0 \text{ such that } \mathbf{s}^{0(n)} \in \mathcal{B} \\ u_{k\,\mathrm{vect}}(\widetilde{\sigma}^0) = u_{k'\,\mathrm{vect}}(\widetilde{\sigma}^0) \end{array}$$

Thus $\alpha_k \ \mathcal{R}_{\beta,\theta} \ \alpha_{k'}$ if and only if for all $i \in \{1, \ldots, n-1\}$:

$$\left(\alpha_k^i - \alpha_{k'}^i\right) - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\left(\alpha_k^n - \alpha_{k'}^n\right) - \frac{\langle \theta^{(n)}, \alpha_k^{(n)} - \alpha_{k'}^{(n)} \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} \left(\sum_{j=1}^r \beta_j \left(\alpha_j^i - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n} \alpha_j^n \right) \right) = 0. \quad (8.34)$$

Notice that

$$\sum_{j=1}^r \beta_j \left(\alpha_j^i - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n} \alpha_j^n \right) = \sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \left(\alpha_j^i - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n} \alpha_j^n \right).$$

In addition, it is important to observe that although the set of $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ such that $\gamma(\beta) \neq 0$ is infinite, the set

$$E := \{\beta_j \mid j \notin \Lambda_e, \gamma(\beta) \neq 0, \Re(t(\beta, \rho)) \geq 0\} \quad (8.35)$$

is finite.

Indeed, since the $t(\beta, \rho)$ which could cancel the zeroes $t_{m,p}$ are necessarily of positive real part, we have

$$\Re(t(\beta, \rho)) = \frac{\Re(\rho) - \sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta, \alpha_j \rangle} \geq 0; \quad (8.36)$$

and consequently

$$\sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \leq \Re(\rho) < 1;$$

which gives that (8.35) is a finite set since for all $j \notin \Lambda_e$, $\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle > 0$.

Consequently the quantity $\sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \left(\alpha_j^i - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n} \alpha_j^n \right)$ can take only finitely many values when β moves.

Let us give some precisions concerning the relation $\mathcal{R}_{\beta,\theta}$.

If we assume that $\sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j^{(n)} \notin \mathbf{Q} \alpha_e^{(n)}$, then there exists $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ such that $\sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \left(\alpha_j^i - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n} \alpha_j^n \right) \neq 0$ and the equality (8.34) is possible only if

$$\frac{\langle \theta^{(n)}, \alpha_k^{(n)} - \alpha_{k'}^{(n)} \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} = \frac{\left(\alpha_k^i - \alpha_{k'}^i\right) - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\left(\alpha_k^n - \alpha_{k'}^n\right)}{\sum_{j \notin \Lambda_e} \beta_j \left(\alpha_j^i - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n} \alpha_j^n \right)}. \quad (8.37)$$

Since by (8.35) $\left\{\frac{(\alpha_k^i-\alpha_{k'}^i)-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}(\alpha_k^n-\alpha_{k'}^n)}{\sum_{j\notin\Lambda_e}\beta_j\left(\alpha_j^i-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\alpha_j^n\right)} \mid \beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}\right\}$ is a finite set and that $\langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle>0$ for all $j\in\{1,\dots,r\}$, the identity (8.37) cannot be satisfied for $\|\beta\|$ large enough if $\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)}\rangle\neq 0$ or $(\alpha_k^i-\alpha_{k'}^i)-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}(\alpha_k^n-\alpha_{k'}^n)\neq 0$ ($\|\beta\|> B_0$ where B_0 is an absolute constant) because the member on the left is not zero and tends to 0 when $\|\beta\|$ tends to infinity.

For $\|\beta\|> B_0$, we have necessarily $\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)}\rangle=0$ and $(\alpha_k^i-\alpha_{k'}^i)-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}(\alpha_k^n-\alpha_{k'}^n)=0$ for the indexes $i\in\{1,\dots,n-1\}$ such that $\sum_{j\notin\Lambda_e}\beta_j\left(\alpha_j^i-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\alpha_j^n\right)\neq 0$.

For the other indexes i such that $\sum_{j\notin\Lambda_e}\beta_j\left(\alpha_j^i-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\alpha_j^n\right)=0$, the identity (8.34) also provides $(\alpha_k^i-\alpha_{k'}^i)-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}(\alpha_k^n-\alpha_{k'}^n)=0$; thus we obtain that $\alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)}\in\mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$. And if we write $\alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)}=q\alpha_e^{(n)}$ ($q\in\mathbf{Q}$), the identity $\langle\theta^{(n)},\alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)}\rangle=0$ gives immediately $q=0$ since $\langle\theta^{(n)},\alpha_e^{(n)}\rangle\neq 0$; and hence $\alpha_k^{(n)}=\alpha_{k'}^{(n)}$.

Now if $\sum_{j=1}^r\beta_j\alpha_j^{(n)}\in\mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$, the equality (8.34) becomes :

$$\forall i\in\{1,\dots,n-1\},\ \left(\alpha_k^i-\alpha_{k'}^i\right)-\frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n}\left(\alpha_k^n-\alpha_{k'}^n\right)=0. \tag{8.38}$$

But then (8.38) gives $\alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)}\in\mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$.

Thus, for β large enough ($\|\beta\|> B_0$), we have :

$$\alpha_k\ \mathcal{R}_{\beta,\theta}\ \alpha_{k'}\implies\begin{cases}\alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)}\in\mathbf{Q}\sum_{j=1}^r\beta_j\alpha_j^{(n)}\\ \alpha_k^{(n)}-\alpha_{k'}^{(n)}\in\mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}.\end{cases}$$

We write $[k_0]$ the equivalence class of k_0 and we consider a set $\mathcal{V}$ whose elements are a representative of each equivalence class.

Now if we consider $\sigma^0\longmapsto h\left(p^{-s_1^0-t(\beta,\rho)\theta_1},\dots,p^{-s_n^0-t(\beta,\rho)\theta_n},p^{-c}\right)$ as a function of $(n-1)$ variables $f_{p,\rho,\beta}(\widetilde{\sigma}_1^0,\dots,\widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$, we can write :

$$f_{p,\rho,\beta}(\widetilde{\sigma}_1^0,\dots,\widetilde{\sigma}_{n-1}^0)=1+\sum_{k_0\in\mathcal{V}}\left(\sum_{\alpha_k\in[k_0]}a_kp^{-v_k-u_{k\,\mathrm{aff}}}\right)p^{-u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}}};$$

where the linear forms $u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}}$ are two at a time distinct.

Remarque 36. Here we can notice a significant difference from Chapter 7. Indeed contrary to Chapter 7 the $u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)$ are not linear but affine in $\widetilde{\sigma}^0$ because of the fact that the last component s_{n+1} of $\mathbf{s}$ is fixed equal to c.

But in order to use arguments of genericity in $\widetilde{\sigma}^0$, it is necessary to consider an equivalence relation on the $u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\text{vect}}$ and not on the $u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)$; it is because of these difficulties that it is not possible a priori to take up again the arguments as they stand in Chapter 7 in the following.

And since we have already completely treated the case where $[h]_e$ is not cyclotomic, we will see in the following that it is possible to overcome these difficulties by reducing the problem in the case where $\beta \in B_e$.

Lemme 36. *We have for $|\boldsymbol{X}^{\alpha_j}| < C$ $(j \in \Lambda_e)$ (C being the constant defined in (7.11) page 198), the following equality :*

$$[h]_e(\boldsymbol{X}) = \prod_{\beta \in B_e} \left(1 - \boldsymbol{X}^{\sum_{j\in\Lambda_e} \beta_j \alpha_j}\right)^{\gamma(\beta)},$$

where the right side converges absolutely, and each $\gamma(\beta)$ is the integral exponent for the factor indexed by β inside the expansion of $h(\boldsymbol{X})$ which is given by Corollary 7.3.2 page 198.

Preuve. Firstly put $d_e = \#\Lambda_e$, and note the corresponding set $\Lambda_e = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_{d_e}\}$. Then we apply Corollary 7.3.2 to the polynomial $[h]_e$. For the same constant C defined in (7.11) we have the absolute convergence of the infinite cyclotomic expansion corresponding to $[h]_e(\mathbf{X})$ whenever each $|\mathbf{X}^{\alpha_j}| < C$. Notice that here the product of this expansion is taken on all the $\tilde{\beta} \in \mathbf{N}^{d_e} - \{\mathbf{0}\}$. To each of these $\tilde{\beta}$ we can associate a unique $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r) \in B_e$ such that $j_k \in \Lambda_e$ implies $\beta_{j_k} = \tilde{\beta}_k$, for each k. Consequently, $\sum_{j=1}^{r} \beta_j \alpha_j = \sum_{i=1}^{d_e} \tilde{\beta}_i \alpha_{j_i}$ if $\beta \in B_e$. Concerning the exponents, we conclude that

$$\gamma(\tilde{\beta}) = \gamma(\beta) \qquad \text{for each } \beta \in B_e,$$

since the expression of $\gamma(\tilde{\beta})$ of Lemma 25 page 194 coincides with that of $\gamma(\beta)$ because the $\beta \in B_e$ correspond exactly to the $\tilde{\beta}$ with the reindexation that we have just defined. This achieves the proof. □

Remarque 37. Since we suppose here that $[W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}]_e$ and hence that $[h]_e$ is cyclotomic, Lemma 36 permits to conclude that there is only a finite number of exponents $\gamma(\beta) \neq 0$ such that $\beta \in B_e$.

Lemme 37. *Moving $\boldsymbol{s}^{0^{(n)}} \in \mathcal{B} \cap \partial W_c(0)$ if necessary, for almost all $t(\beta,\rho) \in \Xi_{u,\eta}$ (i.e. all except a finite number) :*

$$h\left(p^{-s_1^0 - t(\beta,\rho)\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t(\beta,\rho)\theta_n}, p^{-c}\right) \neq 0 \textit{ for all prime number } p.$$

Preuve. Firstly, since the $\beta \in B_e$ such that $\gamma(\beta) \neq 0$ are in finite number according to Remark 37, and since the ρ such that

$$\begin{cases} t(\beta,\rho) \in \Xi_{u,\eta} \\ \beta \in B_e \end{cases}$$

are necessarily also in finite number, the $t(\beta,\rho)$ such that $\beta \in B_e$ and $\gamma(\beta) \neq 0$ are in finite number.

So it suffices to consider from now on the $\beta \notin B_e$.

Now we want to show that moving $\mathbf{s}^0$ if necessary, the function $f_{p,\beta,\rho}(\widetilde{\sigma}^0)$ is nonzero for all p.

Write :

$$f_{p,\rho,\beta}(\widetilde{\sigma}_1^0,\ldots,\widetilde{\sigma}_{n-1}^0) = 1 + \sum_{k_0\in\mathcal{V}} \left(\sum_{\alpha_k \in [k_0]} a_k p^{-v_k - u_{k\,\mathrm{aff}}} \right) p^{-u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}}};$$

where the linear forms $u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}}$ are two at a time distinct.

Now prove that no $u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}}$ for $k_0 \in \mathcal{V}$ is zero for $\beta \notin B_e$ large enough.

So let $k_0 \in \mathcal{V}$.

According to the expression of $u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}}$ given in (8.32), we have

$$u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}} = 0 \Longleftrightarrow \alpha_{k_0}^{(n)} - \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j^{(n)} \frac{\langle \theta^{(n)}, \alpha_{k_0}^{(n)} \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_j \langle \theta'^{n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} \in \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}. \tag{8.39}$$

Assume that there exists a sequence $(\beta_m)_{m\in\mathbf{N}}$ such that for all m there exists ρ_m such that $t(\beta_m,\rho_m) \in \Xi_{u,\eta}$ and such that $\beta_m \notin B_e$ for all m and $\|\beta_m\| \to +\infty$ when $m \to +\infty$ and verifying for all m

$$\alpha_{k_0}^{(n)} - \sum_{j=1}^r \beta_{mj} \alpha_j^{(n)} \frac{\langle \theta^{(n)}, \alpha_{k_0}^{(n)} \rangle}{\sum_{j=1}^r \beta_{mj} \langle \theta'^{n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} \in \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}. \tag{8.40}$$

Since (8.35) is a finite set we have

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{\sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j^{(n)}}{\sum_{j=1}^r \beta_{mj} \langle \theta'^{n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} = \lim_{m\to+\infty} \frac{\sum_{j\in\Lambda_e} \beta_{mj}\alpha_j^{(n)}}{\sum_{j\in\Lambda_e} \beta_{mj} \langle \theta'^{n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} = \frac{\alpha_e^{(n)}}{\langle \theta^{(n)}, \alpha_e^{(n)} \rangle}.$$

By passing to the limit inside (8.40) we obtain necessarily that $\alpha_{k_0}^{(n)} \in \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$. Consequently, again by (8.40), we have that for all m :

$$\sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j^{(n)} \in \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}.$$

Hence there exists $q_m \in \mathbf{N}^*$ such that $\sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j^{(n)} = q_m \widehat{\alpha}_e^{(n)}$.

As $c \in \mathbf{Z}^*$ we have on one hand :

$$\begin{aligned}\langle \sigma^0, \textstyle\sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j\rangle &= \langle \sigma^{0(n)}, \sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j^{(n)}\rangle + c\sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j^{n+1}\\ &= -cq_m\sum_{j=1}^r \beta_{mj}\widehat{\alpha}_e^{\,n+1} + c\sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j^{n+1} \in \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

On the other hand we know that $\forall j\ \langle \sigma^0, \alpha_j\rangle \geq 0$ with a strict inequality for $j \notin \Lambda_e$. We also know that $\beta_m \notin B_e$ implies that there exists $j \notin \Lambda_e$ such that $\beta_{mj} > 0$. We deduce that

$$\langle \sigma^0, \sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j\rangle = \sum_{j=1}^r \beta_{mj}\langle \sigma^0, \alpha_j\rangle = \sum_{j\notin\Lambda_e} \beta_{mj}\langle \sigma^0, \alpha_j\rangle > 0.$$

Consequently we have $\langle \sigma^0, \sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j\rangle \geq 1$.

But since $t(\beta_m, \rho_m) \in \Xi_{u,\eta}$ we must have :

$$0 < \Re(t(\beta_m,\rho_m)) = \frac{\Re(\rho_m) - \langle \sigma^0, \sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j\rangle}{\langle \theta, \sum_{j=1}^r \beta_{mj}\alpha_j\rangle};$$

and hence $\Re(\rho_m) > 1$; which is impossible and proves that $u_{k_0}(\widetilde{\sigma}^0)_{\mathrm{vect}}$ for $k_0 \in \mathcal{V}$ is nonzero for $\beta \notin B_e$ large enough.

Consider now $f_{p,\rho,\beta}(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$ and prove that $f_{p,\rho,\beta}(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$ is nonzero moving $\widetilde{\sigma}^0$ if necessary.

Firstly, if all the $\sum_{\alpha_k\in[k_0]} a_k p^{-v_k - u_{k\,\mathrm{aff}}}$ are zero for $k_0 \in \mathcal{V}$, then we obtain that $f_{p,\rho,\beta}(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$ is a constant function equal to $1 \neq 0$ and satisfies the assertion of the lemma.

Otherwise, there exists at least one $k_0 \in \mathcal{V}$ such that $\sum_{\alpha_k\in[k_0]} a_k p^{-v_k - u_{k\,\mathrm{aff}}} \neq 0$.

Now prove that for all ρ and $\beta \in \mathbf{N}^r\backslash\{\mathbf{0}\}$ fixed, the function $\widetilde{\sigma}^0 \longmapsto f_{p,\beta,\rho}(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$ is nonzero ; and this in a way to ensure the fact that its zeroes define a thin set of $\mathbf{R}^n$ (i.e. of empty interior).

It suffices for this to consider $\mu \in \mathbf{R}^{n-1}$, for example of components $\mathbf{Q}$-linearly independent, so that the $u_{k_0}(\mu)_{\mathrm{vect}}$ are two at a time distinct for $k_0 \in \mathcal{V}$.

And we put :

$$\widetilde{\sigma}^0 = t\mu.$$

Since $u_{k_0}(t\mu)_{\mathrm{vect}} = tu_{k_0}(\mu)_{\mathrm{vect}}$ we obtain :

$$f_{p,\rho,\beta}(t\mu) = 1 + \sum_{k_0\in\mathcal{V}}\left(\sum_{\alpha_k\in[k_0]} a_k p^{-v_k - u_{k\,\mathrm{aff}}}\right)\exp\left(-t\log(p)u_{k_0}(\mu)_{\mathrm{vect}}\right).$$

Then it suffices to use the fact that the functions $\{t \longmapsto \exp\left(-t\log(p)u_{k_0}(\mu)_{\mathrm{vect}}\right)\}_{k_0\in\mathcal{V}}$ are linearly independent since the $u_{k_0}(\mu)_{\mathrm{vect}} \in \mathbf{R}$ are two at a time distinct ; and consequently the function $t \longmapsto f_{p,\rho,\beta}(t\mu)$ is nonzero and the function $\widetilde{\sigma}^0 \longmapsto f_{p,\beta,\rho}(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$ is also nonzero.

Now it suffices to use a variant of the Weierstrass preparation theorem (presented in Lemma 26 of chapter 7) to deduce that, since $f_{p,\beta,\rho}(\widetilde{\sigma}_1^0, \ldots, \widetilde{\sigma}_{n-1}^0)$ is nonzero, the set $f_{p,\beta,\rho}^{-1}(0)$ is of empty interior inside $\mathbf{C}^{n-1}$ and even inside $\mathbf{R}^{n-1}$ (because any function holomorphic on an open set $U \subseteq \mathbf{C}^n$ zero on $U \cap \mathbf{R}^n$ is necessarily zero on U).

then we put :

$$M = \bigcup_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\},p,\rho|\zeta(\rho)=0} f_{p,\beta,\rho}^{-1}(0).$$

This set M, being a countable union of closed sets of empty interior inside $\mathbf{R}^{n-1}$, is also of empty interior inside $\mathbf{R}^{n-1}$ according to Baire's theorem.

To conclude, it is possible to choose $\widetilde{\sigma}^0 \notin M$ so that the function $t \longmapsto Z\left(\mathbf{s}^0 + t\theta\right)$ admits an accumulation of zeroes $t_{m,p}$ inside $\Xi_{u,\eta}$ whithout be cancelled by poles $t(\beta,\rho)$; which completes the proof of this lemma and the proof of Theorem 33.

□

8.4 Proof of Theorem 34.

In this section we want to prove Theorem 34 ; and for this we locate in the previous proof of Theorem 33 when we have used the hypothesis (H).

In the section 8.3 we have considered a vector α_e ($e \in \{1, \ldots, r\}$) such that $\alpha_e^{(n)}$ determines the polar vector of a face $\mathcal{F}(\alpha_e^{(n)}) \subseteq \partial W_c(0)$.

Notice that each face of $\partial W_c(0)$ is determined by a polar vector of the form $\alpha_j^{(n)}$ for a certain j ; and if in particular $\alpha_j^{(n)} \in \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$, then the vector α_j determines a face of $\partial W_c(0)$ only if $\alpha_j = \alpha_e$.

And, having fixed this vector α_e, we have considered a point $\mathbf{s}^{0(n)}$ lying on this face $\mathcal{F}(\alpha_e^{(n)})$ (i.e. such that $\langle\sigma, \alpha_e\rangle = 0$ and $\langle\sigma, \alpha_j\rangle \geq 0$ for all $j \in \{1, \ldots, r\}$).

Then we needed the fact that the vector $\alpha_{e'}$, chosen so that $\langle\sigma^0, \alpha_{e'}\rangle$ is minimal among the $\langle\sigma^0, \alpha_{j_0}\rangle > 0$ verifying $\sum_{\{j:\alpha_j-\alpha_{j_0}\in\mathbf{Q}\alpha_e\}} a_j p^{-i\langle\gamma^{0(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle} c_{k,0}^{p\ \langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle} \neq 0$ (see (5.28) page 112), verifies the following condition :

$$\alpha_{e'}^{(n)} \notin \alpha_e^{(n)}.$$

It is only to ensure this property that we have used the hypothesis (H) in the proof of Theorem 33.

Obviously, this condition is not a priori satisfied if we don't assume the hypothesis (H).

But we must notice that the result that we want to prove here is weaker than Theorem 33. Indeed, we want to prove the fact that we cannot translate globally the boundary $\partial W_c(0)$ until $\partial W_c(\delta)$ for all $\delta < 0$ if h is not cyclotomic.

And consequently, it is possible here to move σ^0 on the face $\mathcal{F}(\alpha_e^{(n)})$ of $\partial W_c(0)$, because here σ^0 is not constraint to stay in a neighbourhood of a point of $\mathcal{F}(\alpha_e^{(n)})$ contrary to the previous section 8.3.

In addition, we know according to the hypothesis (8.1) that the set

$$\mathcal{E}_e := \{\alpha_j \mid \alpha_j^{(n)} \notin \alpha_e^{(n)}\} \neq \emptyset.$$

Now prove that it is possible to have $\alpha_{e'} \in \mathcal{E}_e$ moving the point $\mathbf{s}^{0^{(n)}}$ if necessary on $\mathcal{F}(\alpha_e^{(n)})$.

Firstly consider the quantity $\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle$ for all the vectors $\alpha_j \notin \mathcal{E}_e$ (i.e. such that $\alpha_j^{(n)} \in \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$). For these α_j, there exists $q_j \in \mathbf{Q}$ such that $\alpha_j^{(n)} = q_j \alpha_e^{(n)}$, and consequently :

$$\begin{array}{rcrcl} 0 & < & \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle & = & \langle \sigma^{0^{(n)}}, \alpha_j^{(n)} \rangle + c\ \alpha_j^{n+1} \\ & & & = & q_j \langle \sigma^{0^{(n)}}, \alpha_e^{(n)} \rangle + c\ \alpha_j^{n+1} \\ & & & = & c\left(\alpha_j^{n+1} - q_j \alpha_e^{n+1}\right) \text{ because } \langle \sigma^0, \alpha_e \rangle = \langle \sigma^{0^{(n)}}, \alpha_e^{(n)} \rangle + c\ \alpha_e^{n+1} = 0. \end{array}$$

Thus we observe that $\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle$ for $\alpha_j \notin \mathcal{E}_e$ does not depend on $\sigma^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e^{(n)})$.

Then we put

$$\epsilon_0 := \min_{\alpha_j \notin \mathcal{E}_e} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle = \min_{\alpha_j \notin \mathcal{E}_e} \left(c\left(\alpha_j^{n+1} - q_j \alpha_e^{n+1}\right)\right) > 0$$

(ϵ_0 does not depend on $\sigma^0 \in \mathcal{F}(\alpha_e^{(n)})$).

According to the hypothesis (8.1) we know that $\partial W_c(0)$ does not admit only one face because the $\alpha_j \neq \alpha_e$ such that $\alpha_j^{(n)} \in \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$ don't define any face of $\partial W_c(0)$.

Thus there exists necessarily a vector $\alpha_{j_1} \in \mathcal{E}_e$ such that $\mathcal{F}(\alpha_{j_1}^{(n)})$ is a face of $\partial W_c(0)$ of nonempty intersection with $\mathcal{F}(\alpha_e^{(n)})$. In particular $\mathcal{F}(\alpha_e^{(n)}) \cap \mathcal{F}(\alpha_{j_1}^{(n)})$ is also a face of $\partial W_c(0)$ of dimension stricly inferior.

And the hypothesis (8.2) ensures the fact that $\sum_{\{j : \alpha_j - \alpha_{j_1} \in \mathbf{Q}\alpha_e\}} a_j p^{-i\langle \gamma^{0^{(n)}}, \alpha_j^{(n)} \rangle} {c_{k,0}^{p}}^{\langle \theta^{(n)}, \alpha_j^{(n)} \rangle} \neq 0$.

So for all $\epsilon > 0$, we can find a point $\mathbf{s}^{0^{(n)}} \in \mathcal{F}(\alpha_e^{(n)})$ verifying (8.4) such that

$$0 < \langle \sigma^0, \alpha_{j_1} \rangle < \epsilon.$$

And this is in particular true if $\epsilon < \epsilon_0$.

Now, e' being chosen so that $\langle\sigma^0, \alpha_{e'}\rangle > 0$ is minimal among the $\langle\sigma^0, \alpha_{j_0}\rangle > 0$ verifying $\sum_{\{j:\alpha_j-\alpha_{j_0}\in\mathbf{Q}\alpha_e\}} a_j p^{-i\langle\gamma^{0(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle} c_{k,0}^{p\ \langle\theta^{(n)},\alpha_j^{(n)}\rangle} \neq 0$, we have :

$$\langle\sigma^0, \alpha_{e'}\rangle \leq \langle\sigma^0, \alpha_{j_1}\rangle < \epsilon_0 = \min_{\alpha_j\notin\mathcal{E}_e}\langle\sigma^0, \alpha_j\rangle.$$

Hence we have necessarily $\alpha_{e'}^{(n)} \notin \mathbf{Q}\alpha_e^{(n)}$; which permits to reuse the arguments presented in the section 8.3 to prove Theorem 34.

Remarque 38. We have to notice that the hypothesis (8.1) is absolutely necessary to ensure as the previous argumentation the existence of a direction θ in which the zeroes or poles of $Z(\mathbf{s})$ accumulate.

Indeed, consider the following example :

$$h(X, Y, Z) = 1 + XY + X^2Y^2Z = 1 + \mathbf{X}^{\alpha_1} + \mathbf{X}^{\alpha_2} \in \mathbf{Z}[X, Y, Z];$$

where $\alpha_1 = (1, 1, 0)$ and $\alpha_2 = (2, 2, 1)$;

and the corresponding Euler product (by putting here $c = 1$) :

$$Z(s_1, s_2) = \prod_p h(p^{-s_1}, p^{-s_2}, p^{-1}).$$

Let us observe in particular $t \longmapsto Z(\mathbf{s}^0+t\theta)$ with $\mathbf{s}^0 = (1, -1, 1) \in \partial W(0)\cap\{s_3 = 1\}$ verifying $\langle\mathbf{s}^0, \alpha_1\rangle = 0$ and $\theta = (\theta_1, \theta_2, 0) \in \mathbf{Q}^3 \cap \{\theta_3 = 0\}$.

Then we have

$$W_{\mathbf{s}^0,\theta}(X, Y) = 1 + X^{\langle\mathbf{s}^0,\alpha_1\rangle}Y^{\langle\theta,\alpha_1\rangle} + X^{\langle\mathbf{s}^0,\alpha_2\rangle}Y^{\langle\theta,\alpha_2\rangle} = 1 + Y^{\theta_1+\theta_2} + XY^{2\theta_1+2\theta_2};$$

and satisfies $W_{s^0,\theta}(p^{-1}, p^{-t}) = h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1}, p^{-s_2^0-t\theta_2}, p^{-1}\right)$.

By taking up again the previous notations, the Puiseux series $\Omega_k(X)$ verifying $W_{\mathbf{s}^0,\theta}(p^{-1}, \Omega_k(p^{-1})) = 0$ correspond to the branches of $1 + T + XT^2$ (by putting $T := Y^{\theta_1+\theta_2}$).

But we check without difficulty that there does not exist any branch verifying $|\Omega_k(X)| < 1$ for $|X|$ small.

So there is not any accumulation of zeroes of $t \longmapsto h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1}, p^{-s_2^0-t\theta_2}, p^{-1}\right)$ (of the form $t_{m,p} = -\frac{\log\left(\Omega_k(p^{-1})\right)}{\log(p)} + \frac{2\pi mi}{\log(p)}$; $m \in \mathbf{Z}$, p prime) of positive real part in a neighbourhood of $\Re(t) = 0$.

Moreover, there is not any accumulation of zeroes or poles coming from the factor $t \longmapsto \prod_{\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}\left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^n\langle\beta, \alpha^l\rangle(s_l^0 + t\theta_l) + c\langle\beta, \alpha^{n+1}\rangle\right)\right]^{-\gamma(\beta)}$.

Indeed, these zeroes or poles are of the form :

$$t(\beta, \rho) = \frac{\rho - \beta_1\langle\mathbf{s}^0, \alpha_1\rangle - \beta_2\langle s^0, \alpha_2\rangle}{\beta_1\langle\theta, \alpha_1\rangle + \beta_2\langle\theta, \alpha_2\rangle} = \frac{\rho - \beta_2}{(\beta_1 + 2\beta_2)(\theta_1 + \theta_2)};$$

where $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{N}^2$ and ρ is a zero or a pole of the Riemann zeta function.

So if $\beta_2 > 0$ we will have $\Re(t(\beta, \rho)) \leq 0$; hence the $t(\beta, \rho)$ of positive real part are such that $\beta_2 = 0$.

But we know (according to which has been done in Chapter 7) that these zeroes or poles only come from a finite number of ζ-factors of $\prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \left[\zeta_{M_\delta}\left(\sum_{l=1}^{n+1} \langle \beta, \alpha^l \rangle s_l\right)\right]^{-\gamma(\beta)}$ (which correspond to the cyclotomic factorization of the cyclotomic polynomial $1 + Y^{\theta_1+\theta_2}$) ; and consequently these zeroes or poles are isolated and don't accumulate in a neighbourhood on the right of $\partial W(0)$.

Finally, this example show that sometimes there does not exist any accumulation of zeroes or poles in a neighbourhood on the right of $\partial W(0)$; this means that it will be necessary to develop new tools if we want to expect further results toward Conjecture 4.

8.5 Proof of Theorem 35.

To establish Theorem 35, it suffices to rewrite the Igusa zeta function under the form of an uniform Euler product associated to a certain polynomial ; and we will check that this polynomial satisfies the conditions of Theorem 33.

So let us write for $\sigma_i > 1$ $(i = 1, \ldots, n)$:

$$\begin{aligned}
Z^{\mathrm{ring}}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}]) &= \sum_{m_1, \ldots, m_n \geq 1} \frac{\varphi(m_1 \cdots m_n)}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}} \\
&= \prod_p \left(\sum_{\nu \in \mathbf{N}^n} \frac{\varphi(p^{\|\nu\|})}{p^{\langle \nu, \mathbf{s} \rangle}} \right) \\
&= \prod_p \left(1 + \sum_{\nu \in \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\left(p^{\|\nu\|} - p^{\|\nu\|-1}\right)}{p^{\langle \nu, \mathbf{s} \rangle}} \right) \\
&= \prod_p \left(1 + \left(\sum_{\nu \in \mathbf{N}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{p^{\|\nu\|}}{p^{\langle \nu, \mathbf{s} \rangle}} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right).
\end{aligned}$$

But for $\sigma_i > 2$ $(i = 1, \ldots, n)$, we have :

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu\in\mathbf{N}^n}\frac{p^{\|\nu\|}}{p^{\langle\nu,\mathbf{s}\rangle}} &= \sum_{\nu\in\mathbf{N}^n}\frac{1}{\prod_{i=1}^n p^{\nu_i(s_i-1)}}\\
&= \sum_{\nu\in\mathbf{N}^n}\prod_{i=1}^n\left(\frac{1}{p^{(s_i-1)}}\right)^{\nu_i}\\
&= \prod_{i=1}^n\left(\sum_{\nu_i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{p^{(s_i-1)}}\right)^{\nu_i}\right)\\
&= \prod_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{p^{(s_i-1)}}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Consequently, for $\sigma_i > 2$ $(i = 1, \ldots, n)$ we obtain :

$$\begin{aligned}
Z^{\mathrm{ring}}(s_1,\ldots,s_n;\mathbf{Z}[T,T^{-1}]) &= \prod_p\left(1+\left(\prod_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{p^{(s_i-1)}}\right)^{-1}-1\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\\
&= \prod_p\prod_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{p^{(s_i-1)}}\right)^{-1}\\
&\quad\left(\prod_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{p^{(s_i-1)}}\right)+\left(1-\prod_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{p^{(s_i-1)}}\right)\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\\
&= \prod_{i=1}^n\zeta\left(s_i-1\right)\prod_p\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\prod_{i=1}^n\left(1-\frac{1}{p^{(s_i-1)}}\right)\right)\\
&= \prod_{i=1}^n\zeta\left(s_i-1\right)\prod_p\left(1+\sum_{k=1}^n\sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,n\},\\ \#I=k}}\frac{(-1)^k}{p^{\left(\sum_{l\in I}s_l\right)-k+1}}\right).
\end{aligned}$$

Given that the finite product of zeta functions $\prod_{i=1}^n\zeta\left(s_i-1\right)$ is meromorphic to whole $\mathbf{C}^n$, it suffices to determine the maximal domain of meromorphy of the product :

$$\mathbf{s}\longmapsto\prod_p\left(1+\sum_{k=1}^n\sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,n\},\\ \#I=k}}\frac{(-1)^k}{p^{\left(\sum_{l\in I}s_l\right)-k+1}}\right).$$

By establishing the change of variable $\mathbf{w} = \mathbf{s} - \mathbf{1} = (s_1 - 1, \ldots, s_n - 1)$, we are led to consider the product :

$$\mathbf{w} \longmapsto \prod_p \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\},\\ \#I=k}} \frac{(-1)^k}{p^{\left(\sum_{l\in I} w_l\right)+1}} \right);$$

which is equal to :

$$\prod_p h(p^{-w_1}, \dots, p^{-w_n}, p^{-1}),$$

with

$$h(X_1, \dots, X_{n+1}) = 1 + \sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{\#I} \mathbf{X}^{\alpha_I},$$

by putting for all $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, $\alpha_I^{n+1} = 1$ and for $l \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{cases} \alpha_I^l = 1 \text{ if } l \in I \\ \alpha_I^l = 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

To finish, we easily check that h satisfies the conditions of Theorem 33 ; which completes the proof of Theorem 35.

Appendices

Annexe C

Alternative proofs of the main result in particular cases.

In §7.3.2 we showed that $Z(\mathbf{s})$ can be meromorphically continued from an a priori region of absolute convergence of the infinite product to $W(0)$. In this section we show that no meromorphic continuation exists beyond the boundary of $W(0)$ whenever h is not cyclotomic in some particular cases using different methods that those used in §7.4. As before, we do this by showing that in any neighbourhood of a "generic" point $\mathbf{s}^0$ lying on $\partial W(0)$, there is an accumulation of zeros or poles of $Z(\mathbf{s})$ when $\mathbf{s}^0$ is restricted to a suitable line that goes through the point. (A generic point of $\partial W(0)$ refers to any point contained in a set whose complement is of empty interior.)

The main interest of this part is to put forward the role of the e-main part $[h]_e$ of h in the accumulation of zeroes or poles of $Z(\mathbf{s})$ near $\partial W(0)$. In particular, when this $[h]_e$ is not cyclotomic, we can see that this e-th part of h provides a lot of zeroes/poles (coming from the zeroes of the factors $[h]_e(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n})$ or coming from the zeroes/poles of the ζ-factors of A_{M_δ} produced by the cyclotomic expansion of $[h]_e$ of Corollary 7.3.2) in any neighbourhood of the hyperplane of $\partial W(0)$ determined by α_e.

Throughout this part we will assume that h denotes a polynomial as in §7.1 that is *not* cyclotomic and does not contain any cyclotomic factor.

C.1 First way : when h is irreducible and the e-th main part $[h]_e$ of h is not cyclotomic considering the zeroes/poles coming from the ζ-factors.

We consider here the e-th main part $[h]_e$ of h of Definition 37.

Although h is not cyclotomic, a given $[h]_e$ could be cyclotomic. But here we will suppose that this $[h]_e$ is not cyclotomic.

We can note that the method presented here does not require any hypothesis concerning the face $\mathcal{F}(\alpha_e)$.

Two particular facts that we will need later are proved here. The first insures the existence of infinitely many nonzero exponents $\gamma(\beta)$, created by applying Corollary 7.3.2 to a noncyclotomic $[h]_e$. Once this is proved, the second application then constructs an infinite set of integers whose existence is crucial for applying an idea due to Dahlquist. This asserts that an infinite set of integers must contain an infinite subset of “vertex numbers”.

Notations introduced in §7.4 are also used here.

Lemme 38. *Assume $\alpha_e \in$ Supp h is such that $[h]_e$ is not cyclotomic. Then, if $\boldsymbol{X}^{\alpha_j} < C$ for $j \in \Lambda_e$ (C the constant defined in* (7.11)*), we have :*

$$[h]_e(\boldsymbol{X}) = \prod_{\beta \in B_e} \left(1 - \boldsymbol{X}^{\sum_{j\in\Lambda_e} \beta_j \alpha_j}\right)^{\gamma(\beta)},$$

where the right side converges absolutely, and each $\gamma(\beta)$ is the integer exponent for the factor indexed by β in the expansion for $h(\boldsymbol{X})$ that is given by Corollary 7.3.2

Preuve. We first set $d_e = \#\Lambda_e$, and denote its elements as $\Lambda_e = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_{d_e}\}$. We then apply Corollary 2.2 to the polynomial $[h]_e$. For the same constant C, defined in Lemma 2, we obtain an absolutely convergent infinite product for $[h]_e(\mathbf{X})$ whenever each $|X_i| < C$. It follows that the infinite product expansion is taken over $\tilde{\beta} \in \mathbf{N}^{d_e} - \{\mathbf{0}\}$. To each such $\tilde{\beta}$ there exists a unique $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r) \in B_e$ such that $j_k \in \Lambda_e$ implies $\beta_{j_k} = \tilde{\beta}_k$, for each k. Thus, $\sum_{j=1}^{r} \beta_j \alpha_j = \sum_{i=1}^{d_e} \tilde{\beta}_i \alpha_{j_i}$ whenever $\beta \in B_e$. As for the exponents, we conclude

$$\gamma(\tilde{\beta}) = \gamma(\beta) \qquad \text{for each } \beta \in B_e,$$

since the expression for $\gamma(\tilde{\beta})$ from Lemma 2 must coincide with that for $\gamma(\beta)$ whenever it is the case that $\beta \in B_e$ corresponds to $\tilde{\beta}$ by the indexing that we have just defined. This completes the proof. □

We conclude immediately :

Corollaire C.1.1. If $[h]_e$ is not cyclotomic, then the set

$$\Gamma_e =_{def} \ \{\gamma(\beta) : \beta \in B_e\} - \{0\}.$$

is an infinite subset of $\mathbf{Z}$.

Now let $Q = \{q_{j_i}\}_{j_i \in \Lambda_e}$ be a subset of $\mathbf{N} - \{0\}$. Using the preceding indexing of elements of B_e, it follows that

$$\Upsilon_e(Q) =_{def} \ \left\{ \sum_i q_{j_i} \beta_{j_i} : \beta \in B_e \quad \text{and} \quad \gamma(\beta) \in \Gamma_e \right\} \tag{C.1}$$

is an *infinite* subset of $\mathbf{N}$.

We now recall a definition and theorem due to Dahlquist.

Définition 52 (Dahlquist c.f. [8])**.** We consider an infinite set Υ of positive integers. For $v \in \Upsilon$, we write :

$$v = \prod p_i^{\omega_i},$$

where $\omega_i \geq 0$ and p_i means the i-th prime number.

Then a number $v^* = \prod p_i^{\omega_i^*} \in \Upsilon$ is called a *vertex number* of Υ if there exists a real sequence $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ (depending upon v^*) that satisfies :

$$\sum \lambda_i \omega_i^* > \sum \lambda_i \omega_i,$$

for all $v = \prod p_i^{\omega_i} \in \Upsilon$ such that :

$$v < 2v^*; v \neq v^*.$$

Lemme 39 (Dahlquist [8])**.** *An infinite set Υ of positive integers contains infinitely many vertex numbers.*

Our second corollary is immediate.

Corollaire C.1.2. If $[h]_e$ is not cyclotomic, then for any subset $Q \subset \mathbf{N} - \{0\}$, $\Upsilon_e(Q)$ contains infinitely many vertex numbers.

C.1.1 Natural boundary.

Preliminary remarks

The main result is proved in the following. As above, the idea of the proof is to restrict $Z(\mathbf{s})$ to a complex line L with real direction vector θ that passes through a generic point $\mathbf{s}^0$ of $\partial W(0)$. Given the parametrization $t \to \mathbf{s}^0 + t\theta$ for L, the choice of θ is made in such a way, in particular, that we can use Theorem 28 to deduce an infinite product expansion for $Z\big|_L$ whenever $\Re(t) \geq \delta$ for any $\delta > 0$.

In particular, here we will determine an accumulation of zeroes or poles coming from the ζ-factors coming from the infinite cyclotomic expansion of $[h]_e$ of Corollary 7.3.2.

As before, it will suffice to show that there is a bounded region in the t plane where infinitely many genuine poles or zeroes of $Z\big|_L$ must exist (and therefore do not cancel out). For the bounded region, we will use the rectangle $\Xi_{u,\eta}$ depending upon the parameters $u, \eta > 0$:

$$\Xi_{u,\eta} : \quad \begin{array}{l} 0 < \Re\,(t) < 1 \\ 0 < u < \Im\,(t) < u + \eta. \end{array}$$

In addition, we will also choose u, η to depend upon a parameter $K > 0$ as follows :

$$\eta > \frac{2}{K}, \quad u > \frac{3}{K}, \quad \text{and} \quad \eta < u - \frac{3}{K}. \tag{C.2}$$

To insure that $Z\big|_L$ inherits a product decomposition from $Z(\mathbf{s})$ whenever $\Re(t) \geq \delta, (\forall \delta > 0)$, a simple constraint upon the components of θ suffices. To state this, it suffices to assume that there exists a unique line $\langle \alpha_e \rangle$ such that $\langle \sigma^0, \alpha_e \rangle = 0$, that is, $\mathbf{s}^0$ belongs to the interior of a face of $\partial W(0)$. In this event, we then impose the condition (7.14) as in §7.4.

To prove the main theorems, two steps are needed. First we must show that there exist infinitely many possible poles or zeroes of $Z\big|_L$ inside some $\Xi_{u,\eta}$. For this the product expansion for $Z\big|_L$ is needed, as are some classical estimates for estimating the number of nontrivial zeroes of $\zeta(s)$ in rectangles. The second step is more delicate. This requires us to detect when there is cancellation between such poles/zeroes within some $\Xi_{u,\eta}$. The principal criterion we use is a natural modification of one used by Dahlquist. It is for this reazon that we need to know that infinitely many vertex numbers exist inside an infinite subset of integers.

For either case, an important point is the restriction to a generic point $\mathbf{s}^0$ of $\partial W(0)$. It is clear that if we show that for such a point, there is an open disc $\mathcal{B}$ such that $Z\big|_L$ contains infinitely many genuine poles or zeroes, then Z could not be meromorphic, not only at $\mathbf{s}^0$, but, in fact, at *any* point $\hat{\mathbf{s}} \in \partial W(0)$(since any neighbourhood $\mathcal{B}$ of $\hat{\mathbf{s}}$ necessarily contains infinitely many generic points, at each of which, Z is not meromorphic). Technically this is useful since it is much more convenient to work with generic subsets of $\partial W(0)$.

The generic set we end up using is constructed in three steps. The first step is to choose e and restrict to those $\mathbf{s}^0$ that belong to the interior of the face perpendicular to α_e. We can then restrict our attention solely to those factors from Theorem 5 that are indexed by a vector β belonging to B_e. Thus, we first assume that

$$\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle = 0 \iff \exists \text{ a unique } e \text{ so that } \alpha_j \in \langle \alpha_e \rangle. \tag{C.3}$$

Secondly, we can then cut out from the interior of the face perpendicular to α_e the countable union of the intersection of all (tubes over the) hyperplanes $\{\sigma^0 : \langle \sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j, \sigma^0 \rangle = 0\}$ whenever α_e and $\sum_{j=1}^r \beta_j \alpha_j$ ($\beta \in \mathbf{N}^r - \{\mathbf{0}\}$) are linearly independent.

It will be convenient decompose the arguments in two steps : we will first prove the accumulation of zeroes or poles coming from A_{M_δ} for $\delta > 0$ (i.e. we consider only the ζ-factors of $Z|_L$) ; after that we determine the natural boundary of $Z|_L$ proving that the singularities coming from $t \longmapsto A_{M_\delta}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ which accumulate in the neighbourhood at the right of $t = 0$ are not cancelled by zeroes coming from $t \longmapsto \prod_{p \le M_\delta} h\left(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}\right)$. provided that s^0 is a generic point of $\partial W(0) \cap \mathcal{B}$.

Accumulation of zeroes or poles coming from A_{M_δ}.

The main result of this section is as follows.

Proposition 13. *Assume that $[h]_e$ is not cyclotomic.*

There exists in $\Xi_{u,\eta}$ an infinity of zeroes or poles coming from $t \longmapsto A_{M_\delta}(\boldsymbol{s}^0 + t\theta)$ for a generic point $\boldsymbol{s}^0 \in \partial W(0) \cap \mathcal{B}$ and for a suitable direction θ.

Remarque 39. We have :

$$A_{M_\delta}(\mathbf{s}) = \prod_{\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \left[\zeta_{M_\delta} \left(\sum_{l=1}^{n} \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell \right) \right]^{-\gamma(\beta)} \quad \text{if} \quad \mathbf{s} \in W(\delta). \tag{C.4}$$

Using the line $L = L(\mathbf{s}^0, \theta)$ from §C.1.1, the zeroes and poles of $A_{M_\delta}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ are determined by $\zeta_{M_\delta}(s)$, and since these are exactly the same (with the same multiplicity) as for $\zeta(s)$, it follows that any pole or zero of $A_{M_\delta}\big|_L$ must be of the form :

$$t(\beta, \rho) = \frac{\rho - \sum_{l=1}^n \langle \beta, \alpha^\ell \rangle s_\ell^0}{\sum_{l=1}^n \langle \beta, \alpha^\ell \rangle \theta_\ell} = \frac{\rho - \sum_{j=1}^r \langle \mathbf{s}^0, \alpha_j \rangle \beta_j}{\sum_{j=1}^r \langle \theta, \alpha_j \rangle \beta_j} \tag{C.5}$$

where $\beta \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ is such that $\gamma(\beta) \neq 0$, and ρ denotes a zero or pole of $\zeta(s)$.

In the following, we will limit ρ to be a zero in the critical strip. This suffices for purposes of proving Proposition 13. □

Preuve de la proposition. We fix the index e, assume $\mathbf{s}^0$ satisfies (C.3), and consider any open ball $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{s}^0)$ containing $\mathbf{s}^0$. As a result, in the rest of the discussion, we will restrict attention to $\beta \in B_e$. For such β, (C.5) evidently simplifies to give :

$$t\left(\beta,\rho\right) = \frac{\rho - i\sum_{j\in\Lambda_e}\left\langle\gamma^0,\alpha_j\right\rangle\beta_j}{\sum_{j\in\Lambda_e}\langle\theta,\alpha_j\rangle\beta_j}.$$

We then observe that since θ is chosen to satisfy (7.14), and ρ is confined to the critical strip, we must have :

$$\Re\left(t(\beta,\rho)\right) \in (0,1).$$

The goal is to show that infinitely many $t(\beta,\rho)$ must belong to $\Xi_{u,\eta}$ and be genuine poles or zeroes of $A_{M_\delta}\big|_L$. We proceed in two steps :

(1) Prove that infinitely many $t(\beta,\rho)$ are possible poles or zeroes inside $\Xi_{u,\eta}$.
(2) From the set of $t(\beta,\rho)$ constructed in (1), prove that infinitely many poles or zeroes cannot be cancelled.

Proof of Part (1). This is an immediate consequence of the following lemma.

Lemme 40. *Assume that θ satisfies, in addition to (7.14), the condition :*

$$\langle\theta,\alpha_j\rangle \geq K max_{\{\gamma^0:s^0\in\mathcal{B}\}}\left|\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle\right| \quad \textit{for each } j\in\Lambda_e \quad (K \textit{ the parameter in (C.2)}). \tag{C.6}$$

There exists $b = b(\eta, K)$ such that if $\beta \in B_e$ satisfies $||\beta|| > b$, then there exists ρ such that $t(\beta,\rho) \in \Xi_{u,\eta}$.

Proof of Lemma 40. For $\beta \in B_e \setminus \{\mathbf{0}\}$, it follows that

$$t(\beta,\rho)\in\Xi_{u,\eta} \quad \text{iff} \quad 2\pi x\left(\beta\right) < \Im\left(\rho\right) < 2\pi x\left(\beta\right) + 2\pi\eta y\left(\beta\right), \tag{C.7}$$

where

$$\begin{aligned} x\left(\beta\right) &= \tfrac{1}{2\pi}\left(u\sum_{j\in\Lambda_e}\langle\theta,\alpha_j\rangle\beta_j + \sum_{j\in\Lambda_e}\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle\beta_j\right), \\ y\left(\beta\right) &= \tfrac{1}{2\pi}\sum_{j\in\Lambda_e}\langle\theta,\alpha_j\rangle\beta_j. \end{aligned}$$

So we must verify that there exist ρ with imaginary part inside the interval defined in (C.7) for $||\beta||$ large enough.

For this we need a classical result concerning the number of zeroes of $\zeta\left(s\right)$ in the critical strip with height at most T :

$$N\left(T\right) := \#\left\{\rho : 0 \leq \Im\left(\rho\right) \leq T\right\} = \frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O\left(\log T\right).$$

Thanks to the hypothesis (C.6), an elementary verification shows that the inequalities in (C.7) are satisfied iff

$$0<\left(u-\frac{1}{K}\right)y\left(\beta\right)\leq x\left(\beta\right)\leq\left(u+\frac{1}{K}\right)y\left(\beta\right);$$

Thus :

$$\begin{aligned} N\left(2\pi x\left(\beta\right)+2\pi\eta y\left(\beta\right)\right)-N\left(2\pi x\left(\beta\right)\right) &= \left(x\left(\beta\right)+\eta y\left(\beta\right)\right)\log\left(x\left(\beta\right)+\eta y\left(\beta\right)\right) \\ &\quad -\eta y\left(\beta\right)-x\left(\beta\right)\log\left(x\left(\beta\right)\right)+O\left(x\left(\beta\right)+\eta y\left(\beta\right)\right) \\ &\geq \left(u-\tfrac{1}{K}+\eta\right)y\left(\beta\right)\log\left(\left(u-\tfrac{1}{K}\right)y\left(\beta\right)\right)-\eta y\left(\beta\right) \\ &\quad -\left(u+\tfrac{1}{K}\right)y\left(\beta\right)\log\left(\left(u+\tfrac{1}{K}\right)y\left(\beta\right)\right)+O\left(y\left(\beta\right)\right) \\ &= \left(\eta-\tfrac{2}{K}\right)y\left(\beta\right)\log\left(y\left(\beta\right)\right)+O\left(y\left(\beta\right)\right). \end{aligned}$$

We conclude that for $\beta\in B_e$ with sufficiently large $||\beta||$, in particular, for $||\beta||$ so large that

$$(\eta-\frac{2}{K})\log y(\beta)+c>1,$$

where c is the implied constant in the $O(y(\beta))$ error term (this is the origin of the lower bound $b(\eta,K)$ in the statement of the lemma), there exist ρ with

$$2\pi x(\beta)<Im(\rho)<2\pi\left[x(\beta)+\eta y(\beta)\right].$$

This completes the proof of Lemma 40 and Part (1). □

Proof of Part (2). The proof of this part is more delicate.

The first issue that must be understood is the possible cancellation that can occur between the possible zero/pole $t(\beta,\rho)\in\Xi_{u,\eta}$ as defined in Part (1) (so that $\beta\in B_e$ and $\gamma(\beta)\neq 0$) and a second possible zero/pole $t(\beta',\rho')\in\Xi_{u,\eta}$ determined by *any other* $\beta'\in\mathbf{N}^r-\{\mathbf{0}\}$ (with $\gamma(\beta')\neq 0$) and zero ρ' in the critical strip. Were this to occur, it would necessarily require (by (C.5)) the following equations (since $\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle=0$ for all $j\in\Lambda_e$) :

$$\frac{\Re\left(\rho'\right)-\sum_{j=1}^{r}\left\langle\sigma^0,\alpha_j\right\rangle\beta_j'}{\sum_{j=1}^{r}\left\langle\theta,\alpha_j\right\rangle\beta_j'}=\frac{\Re\left(\rho\right)}{\sum_{j\in\Lambda_e}\left\langle\theta,\alpha_j\right\rangle\beta_j}\quad\text{and}\quad\gamma(\beta')=-\gamma(\beta).$$

Two distinct possibilities must then be considered. Either $\sum_{j=1}^{r}\left\langle\sigma^0,\alpha_j\right\rangle\beta_j'$ does not vanish, or it does, in which case, (C.3) implies that genericity of $\mathbf{s}^0$ is equivalent to $\beta'\in B_e$ since $\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle\geq 0$ forall j and vanishes iff $j\in\Lambda_e$. We first analyze what can happen if $\sum_{j=1}^{r}\left\langle\sigma^0,\alpha_j\right\rangle\beta_j'\neq 0$.

Note. In the rest of the discussion, we will fix any generic $\mathbf{s}^0$, satisfying (C.3) for the same e as was used in Part (1). We then fix any open ball $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{s}^0)$ containing $\mathbf{s}^0$ and assume that the real direction vector θ satisfies (C.6) for all $\mathbf{s} \in \mathcal{B}(\mathbf{s}^0)$ (as well as satisfying (7.14) of course). In contrast to (7.14), a condition that is uniform over all points in the interior of a particular face of $\partial W(0)$, this now means that θ is chosen to be locally uniform in $\mathbf{s}^0$. This suffices for purposes of proving Proposition 13. $\square$

Lemme 41. *There exists a generic subset $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{s}^0)$ such that $\boldsymbol{s}' = \sigma' + i\gamma' \in \mathcal{B}'$ implies :*

$$\frac{\Re(\rho') - \sum_{l=1}^{n} \langle \beta', \alpha^\ell \rangle \sigma'_\ell}{\sum_{j=1}^{r} \langle \theta, \alpha_j \rangle \beta'_j} \neq \frac{\Re(\rho)}{\sum_{j \in \Lambda_e} \langle \theta, \alpha_j \rangle \beta_j} \tag{C.8}$$

for all $\beta \in B_e - \{\boldsymbol{0}\}$, $\beta' \in \boldsymbol{N}^r - \{\boldsymbol{0}\}$ satisfying $\sum_{j=1}^{r} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \beta'_j \neq 0$, and all zeroes ρ, ρ' of $\zeta(s)$ in the critical strip.

Preuve. Let E be the hyperplane $\{\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n : \langle \mathbf{x}, \alpha_e \rangle = 0\}$. We define $U = E \cap \mathcal{B}(\mathbf{s}^0)$, and will look for a dense subset of U on which (C.8) is satisfied in order to prove the assertion.

For each β' such that $\sum_{j=1}^{r} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \beta'_j \neq 0$, we define the linear map : $c_{\beta'} : E \longrightarrow \mathbf{C}$ by setting

$$c_{\beta'}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\ell} \langle \beta', \alpha^\ell \rangle x_\ell =_{def} z.$$

We claim that $c_{\beta'}(.)$ is *not* constant.

To see this, we first eliminate one coordinate from $c_{\beta'}$. By permuting indices, if needed, we may assume that $\alpha_e^n \neq 0$. So, $\mathbf{x} \in E$ iff $x_n = (-1/\alpha_e^n) \sum_{i<n} \alpha_e^i x_i$. Rewriting $c_{\beta'}$ in terms of $\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ now gives

$$c_{\beta'}(\mathbf{x}') = \sum_{i<n} \left(\langle \beta', \alpha^i \rangle - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n} \langle \beta', \alpha^n \rangle \right) x_i.$$

Thus, $c_{\beta'}$ is constant iff for each $i < n$, $\langle \beta', \alpha^i \rangle - \frac{\alpha_e^i}{\alpha_e^n} \langle \beta', \alpha^n \rangle = 0$.

Elementary manipulations then show :

$$0 \neq \sum_{j=1}^{r} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \beta'_j = \frac{1}{\alpha_e^n} \cdot \langle \sigma^0, \alpha_e \rangle \cdot \left(\sum_{j=1}^{r} \beta'_j \alpha_j^n \right) = 0.$$

Thus, $c_{\beta'}$ cannot be constant whenever $\sum_{j=1}^{r} \langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \beta'_j \neq 0$.

We now recall that the genericity condition (C.3) satisfied by $\mathbf{s}^0$ is equivalent to saying $\sum_j \beta'_j \alpha_j \notin \langle \alpha_e \rangle$. We then define for each such β' :

$$M_{\beta'} = \bigcup_{\rho, \rho'} \left\{ \Re(\rho') - \Re(\rho) \frac{\sum_{j=1}^{r} \langle \theta, \alpha_j \rangle \beta'_j}{\sum_{j \in \Lambda_e} \langle \theta, \alpha_j \rangle \beta_j} : \beta \in B_e \setminus \{\mathbf{0}\} \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^{r} \beta'_j \alpha_j \notin \langle \alpha_e \rangle \right\}.$$

It is clear that $M_{\beta'}$ is a countable set.

For each $z \in M_{\beta'}$, $c_{\beta'}^{-1}(z)$ is an affine subspace of E of dimension at most $n-2$, so it is closed and has empty interior in E. An application of Baire's theorem then permits to conclude that $\bigcup_{\{\beta':\sum_j \beta'_j\alpha_j \notin \langle\alpha_e\rangle\}} \bigcup_{z\in M_{\beta'}} c_{\beta'}^{-1}(z)$ has empty interior in E.

We conclude that $\mathcal{B}' =_{def} U \setminus \bigcup_{\beta'} \bigcup_{z\in M_{\beta'}} c_{\beta'}^{-1}(z)$ is dense in U, and satisfies all the properties we need to complete the proof of the lemma. $\square$

The remaining possibility to consider involves the cancellation between our initial candidate pole/zero $t(\beta,\rho) \in \Xi_{u,\eta}$ (where $\beta \in B_e$, $\gamma(\beta) \neq 0$) and some other pole/zero $t(\beta',\rho') \in \Xi_{u,\eta}$ such that $\gamma(\beta') = -\gamma(\beta)$ and

$$\sum_{j=1}^{r} \langle\sigma^0, \alpha_j\rangle\, \beta'_j = 0.$$

By the genericity condition (C.3) satisfied by $\mathbf{s}^0$, we recall that this implies $\beta' \in B_e$. Thus, there exists $q'_0\ (= q'_0(\beta')) \in \mathbf{Q}$ such that

$$\sum_{j=1}^{r} \beta'_j\alpha_j = q'_0\alpha_e\,. \tag{C.9}$$

If cancellation occurs, the equation $t(\beta',\rho') = t(\beta,\rho)$ implies the expressions (C.5) then reduce to the following equation :

$$\frac{\rho' - i\sum_{j=1}^{r}\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle\beta'_j}{\sum_{j=1}^{r}\langle\theta,\alpha_j\rangle\beta'_j} = \frac{\rho - i\sum_{j\in\Lambda_e}\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle\beta_j}{\sum_{j\in\Lambda_e}\langle\theta,\alpha_j\rangle\beta_j}. \tag{C.10}$$

We now use (C.9) to rewrite the terms involving $\sum_{j=1}^{r}\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle\beta'_j$ resp. $\sum_j\langle\theta,\alpha_j\rangle\beta'_j$ in terms of $\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle$ resp. $\langle\theta,\alpha_e\rangle$. On the left side, (C.9) implies

$$\sum_{j=1}^{r}\langle\gamma^0,\alpha_j\rangle\beta'_j = q'_0\langle\gamma^0,\alpha_e\rangle \quad \text{resp.} \quad \sum_{j=1}^{r}\langle\theta,\alpha_j\rangle\beta'_j = q'_0\langle\theta,\alpha_e\rangle.$$

On the right side, we know there exist $q_j \in \mathbf{Q}$ such that $\alpha_j = q_j\alpha_e$ for each $j \in \Lambda_e$. A straightforward manipulation shows that if (C.10) occurs, then necessarily

$$\rho' = \rho \cdot \frac{q'_0}{\sum_{j\in\Lambda_e} q_j\,\beta_j} \tag{C.11}$$

that is, ρ' must be a rational multiple of ρ.

As a result, the hypothesis of cancellation between $t(\beta',\rho')$ and $t(\beta,\rho)$ in the event that $\sum_j\langle\sigma^0,\alpha_j\rangle\beta'_j = 0$ leads to the problem of understanding in more detail the set of zeroes ρ' of $\zeta(s)$ that lie on a line which contains a given zero ρ. This was studied already by Dahlquist. The variant of his result that we need uses the objects (and notations) introduced in Lemma 40.

Lemme 42 (Dahlquist c.f. [8])**.** *If $\|\beta_0\|$ is large enough, there exists inside the rectangle $\mathcal{R}$:*

$$\mathcal{R}: \begin{array}{ccccc} 0 & < & \Re(z) & < & 1 \\ 2\pi x(\beta_0) & < & \Im(z) & < & 2\pi x(\beta_0) + 2\pi\eta y(\beta_0) \end{array}$$

a zero ρ_0 of the Riemann zeta function such that the straight line ℓ_0 going through 0 and ρ_0 does not contain any zero outside $\mathcal{R}$.

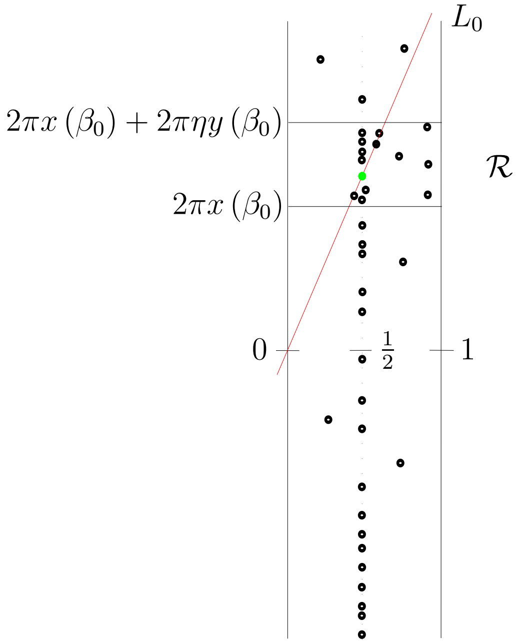

FIG. C.1 – Lemma 42 of Dhalquist.

We will prove Lemma 42 at the end of this section. For now, we show how this helps to complete the proof of Proposition 13 by proving the existence of infinitely many possible poles/zeroes of $A_{M_\delta}\big|_L$ in $\Xi_{u,\eta}$ that must, in fact, be real poles/zeroes, i.e. they cannot be cancelled.

The first point to make is that we can be more precise about q_0' and the q_j. It suffices to start with a particular choice for the vector α_e. In particular, there exists a vector $\widehat{\alpha}_e$ with relatively prime integral components such that $\alpha_e = q_e\widehat{\alpha}_e$. Using $\widehat{\alpha}_e$

in place of α_e in the preceding discussion is permissible. We then define the integers q_j in the same way as above, that is, we set $\alpha_j = q_j\widehat{\alpha}_e$ for $j \neq e$. Using $\widehat{\alpha}_e$ in (C.10) then leads to the same equation (C.11) where

$$\sum_j \beta_j'\alpha_j = q_0'\widehat{\alpha}_e.$$

As a result, we conclude that $q_0' \in \mathbf{N}$.

With this choice for each q_j, we now set $\widehat{\mathcal{Q}} = \{q_j\}_{j\in\Lambda_e}$ and define $\Upsilon_e(\widehat{\mathcal{Q}})$ exactly as in (C.1) with $Q = \widehat{\mathcal{Q}}$. Applying the discussion in that section, it therefore follows that $\Upsilon_e(\widehat{\mathcal{Q}})$ contains infinitely many vertex numbers.

Let $\beta^* \in B_e$ be such that

$$v(\beta^*) =_{def} \sum_{j\in\Lambda_e} q_j\beta_j^*$$

is a vertex number of $\Upsilon_e(\widehat{\mathcal{Q}})$, and let $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ denote the coefficients associated to $v(\beta^*)$.

Our goal will be to show that there exists a zero ρ_0^* such that $t(\beta^*, \rho_0^*)$ is a real pole/zero of $A_{M_\delta}\big|_L$ that belongs to $\Xi_{u,\eta}$, that is, it cannot be cancelled by any $t(\beta', \rho')$ such that $\sum_j \langle\sigma^0, \alpha_j\rangle\, \beta_j' = 0$.

Since the set of vertex numbers of $\Upsilon_e(\mathcal{Q})$ is infinite, we may assume that $||\beta^*||$ is sufficiently large so that Lemma 42 can be applied to β^* and rectangle $\mathcal{R}$. Thus, there exists a zero $\rho_0^* \in \mathcal{R}$ such that the line through 0 and ρ_0^* contains *no* zero of $\zeta(s)$ that is outside $\mathcal{R}$. We can then define the following set :

$$\Omega(\rho_0^*) = \{\rho \in \mathcal{R} : \rho \in \rho_0^*\,\mathbf{Q}\}.$$

Suppose first that $\Omega(\rho_0^*) = \emptyset$. This would imply that for any β' such that $\sum_j \beta_j'\alpha_j \in \langle\widehat{\alpha}_e\rangle$, and zero ρ',

$$t(\beta', \rho') \neq t(\beta^*, \rho_0^*),$$

for otherwise it would have to be the case that $\rho' \in \mathcal{R}$ and, by (C.11), $\rho' \in \rho_0^*\,\mathbf{Q}$. Thus, if $\Omega(\rho^*) = \emptyset$, then $t(\beta^*, \rho_0^*)$ would have to be a genuine pole/zero of $A_{M_\delta}\big|_L$ inside $\Xi_{u,\eta}$ that could not be cancelled, and the proof of Part (2) would already be finished. So, we may assume that $\Omega(\rho_0^*)$ is nonempty and necessarily, also finite.

As a result, there exists a finite set of rational numbers u_k such that $\Omega(\rho_0^*) = \{\rho_0^* u_k\}_k$. Writing each u_k in reduced form, for each k, there exists a finite set of integers $y_\ell(k)$ such that

$$u_k = \prod p_\ell^{y_\ell(k)}.$$

The set of exponents $\{y_\ell(k)\}_{\ell,k}$ is therefore a finite set. Thus, the set $\{\sum_\ell \lambda_\ell y_\ell(k)\}_k$ must be a bounded subset of $\mathbf{R}$.

Set k^* to be a value of k for which

$$\sum_\ell \lambda_\ell y_\ell(k^*) = \inf_k \Big\{ \sum_\ell \lambda_\ell y_\ell(k) \Big\}$$

and define the rational number u^* with the particular factorization

$$u^* = \prod_\ell p_\ell^{y_\ell(k^*)}.$$

To this rational number there corresponds a root ρ^* such that $\rho^* = \rho_0^* \cdot u^*$.

Assume now that there exists a zero ρ' and $\beta' \in \mathbf{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ such that for some β^*, constructed as above,

$$t(\beta', \rho') = t(\beta^*, \rho^*) \quad \text{and} \quad \gamma(\beta') = -\gamma(\beta^*).$$

The crucial observation is then as follows.

Lemme 43. *If $||\beta^*||$ is sufficiently large, then $t(\beta^*, \rho^*)$ must be a pole/zero of $A_{M_\delta}\big|_L$ in $\Xi_{u,\eta}$. In particular, it cannot be cancelled with any other possible pole/zero $t(\beta', \rho') \in \Xi_{u,\eta}$ whenever $\sum_j \beta'_j \, \alpha_j \in \langle \widehat{\alpha}_e \rangle$ and the set of such β' is an unbounded set.*

Preuve. We argue by contradiction.

Exactly as above, there exists $q'_0 (= q'_0(\beta')) \in \mathbf{N}$ such that

$$\frac{\rho'}{q'_0} = \frac{\rho^*}{\sum_{j \in \Lambda_e} q_j \, \beta^*_j}.$$

We then factor $q'_0, \sum_j q_j \beta^*_j$ into products of prime powers. Thus, there exist nonnegative integers ω^*_ℓ and ω'_ℓ such that

$$\sum_{j \in \Lambda_e} q_j \, \beta^*_j = \prod_\ell p_\ell^{\omega^*_\ell} \quad \text{and} \quad q'_0 = \prod_\ell p_\ell^{\omega'_\ell}.$$

Moreover, since ρ' is a rational multiple of ρ^* and ρ^* is a rational multiple of ρ^*_0, there must also be integers y'_ℓ such that $\rho' = \rho^*_0 \prod_\ell p_\ell^{y'_\ell}$. Since $\rho'/\rho^* = (\rho'/\rho^*_0)/(\rho^*/\rho^*_0)$, we conclude that

$$y_\ell(k^*) - \omega^*_\ell = y'_\ell - \omega'_\ell \quad \text{for each } \ell.$$

But this now implies :

$$\sum_\ell \lambda_\ell (y_\ell(k^*) - y'_\ell) = \sum_\ell \lambda_\ell (\omega^*_\ell - \omega'_\ell). \tag{C.12}$$

By the definition of u^*, the left side of $(C.12)$ must be non positive. On the other hand, the right side must be *positive*. This follows from three observations :

(i) $\sum_{j\in\Lambda_e} q_j\,\beta_j^*$ *is a vertex number*;

(ii) $q_0' \in \Upsilon_e(\widehat{\mathcal{Q}})$ *since* $\beta' \in B_e$ *and* $\gamma(\beta') \neq 0$ *;*

(iii) *for* $||\beta^*||$ *sufficiently large the inequality* $q_0' < 2\sum_{j\in\Lambda_e} q_j\beta_j^*$ *is satisfied when* $t(\beta',\rho'), t(\beta^*,\rho^*) \in \Xi_{u,\eta}$.

We verify (iii).

It follows from the fact that $\rho'/\rho^* = q_0'/\sum_{j\in\Lambda_e} q_j\beta_j'$ can be made arbitrarily close to $\Im\rho'/\Im\rho^*$ by letting $||\beta^*|| \to \infty$. Since $\Im(\rho')$ and $\Im(\rho^*)$ are both in the interval $\left[\left(u-\frac{1}{K}\right)y\left(\beta^*\right), \left(u+\frac{1}{K}+\eta\right)y\left(\beta^*\right)\right]$, the fact that $0 < \eta < u - \frac{3}{K}$ then implies $\Im\rho'/\Im\rho^* < \frac{u+\frac{1}{K}+\eta}{u-\frac{1}{K}} < 2$. Thus, if $||\beta^*||$ is sufficiently large, then $q_0' < 2\sum_{j\in\Lambda_e} q_j\beta_j^*$.

Finishing the proof of Part (2). For each vertex number of $\Upsilon_e(\widehat{\mathcal{Q}})$, $A_{M_\delta}\big|_L$ has a pole/zero inside $\Xi_{u,\eta}$ which cannot be cancelled. Since $\Upsilon_e(\widehat{\mathcal{Q}})$ contains infinitely many vertex numbers, infinitely many poles or zeroes of $A_{M_\delta}\big|_L$ must lie in $\Xi_{u,\eta}$. This now completes the proof of Part (2) of Proposition 13. ☐

Proof of Lemma 42.

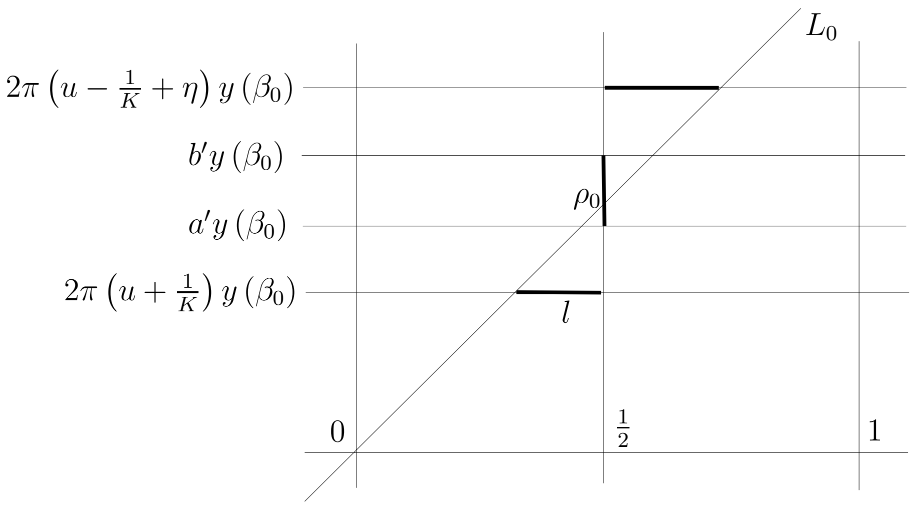

FIG. C.2 – Proof of Dhalquist's lemma 42.

Firstly notice that the rectangle $\mathcal{R}$ contains the following rectangle $\mathcal{R}'$:

$$\mathcal{R}' : \begin{array}{ccccc} 0 & < & \Re(z) & < & 1 \\ 2\pi\left(u+\frac{1}{K}\right)y\left(\beta_0\right) & < & \Im(z) & < & 2\pi\left(u-\frac{1}{K}+\eta\right)y\left(\beta_0\right). \end{array}$$

Let a' and b' be such that :

$$\begin{array}{lll} a' & > & 2\pi\left(u+\frac{1}{K}\right)y\left(\beta_0\right) \\ b' & < & 2\pi\left(u-\frac{1}{K}+\eta\right)y\left(\beta_0\right); \end{array}$$

and consider the rectangle $\mathcal{R}'' \subsetneq \mathcal{R}' \subsetneq \mathcal{R}$ defined by :

$$\mathcal{R}'' : \begin{array}{ccccc} 0 & < & \Re\left(z\right) & < & 1 \\ a'y\left(\beta_0\right) & < & \Im\left(z\right) & < & b'y\left(\beta_0\right). \end{array}$$

According to Hardy and Littlewood [14], the number of distinct zeros of $\zeta(z)$ inside $\mathcal{R}''$ lying on the straight line $\Re(z)=\frac{1}{2}$ between $\Im(z)=a'y\left(\beta_0\right)$ and $\Im(z)=b'y\left(\beta_0\right)=a'y\left(\beta_0\right)+\frac{(b'-a')}{a'}a'y\left(\beta_0\right)$ is greater than $C\left(\frac{b'-a'}{a'}\right)a'y\left(\beta_0\right)$ where $C(\epsilon)$ is a constant depending on $\epsilon>0$.

On the other hand, let L_0 be a straight line passing through 0 and through a zero of $\zeta(z)$ on $\mathcal{R}''\cap\{\Re(z)=\frac{1}{2}\}$.

Then let us explicit a lower bound for all other zero ρ on $L_0\setminus\mathcal{R}'$ of the quantity $l=|\Re(\rho)-\frac{1}{2}|$.

Applying Thales's theorem to the triangles delimited by the lines $\Im(z)=0$, $\Re(z)=\frac{1}{2}$, $\Im(z)=2\pi\left(u+\frac{1}{K}\right)y\left(\beta_0\right)$, $\Im(z)=2\pi\left(u-\frac{1}{K}+\eta\right)y\left(\beta_0\right)$ and the line passing through 0 and ρ, we obtain :

$$\begin{array}{lll} \frac{l}{\frac{1}{2}} & \geq & \min\left(\frac{a'y(\beta_0)-2\pi\left(u+\frac{1}{K}\right)y(\beta_0)}{a'y(\beta_0)};\frac{2\pi\left(u-\frac{1}{K}+\eta\right)y(\beta_0)-b'y(\beta_0)}{b'y(\beta_0)}\right) \\ & = & \min\left(\frac{a'-2\pi\left(u+\frac{1}{K}\right)}{a'};\frac{2\pi\left(u-\frac{1}{K}+\eta\right)-b'}{b'}\right)=\epsilon_0>0. \end{array}$$

Finally, we have the existence of L_0 with the desired property by using the result of Bohr and Landau [3] which permits to assert that the number of zeros of $\zeta(z)$ of imaginary part $0<\Im(z)<2\pi\left(u-\frac{1}{K}+\eta\right)y\left(\beta_0\right)$ and of real part $|\Re(z)-\frac{1}{2}|>\frac{\epsilon_0}{2}$ is $o\left(y\left(\beta_0\right)\right)$.

□

Natural boundary of $Z\left(\mathbf{s}\right)$ when $[h]_e$ is not cyclotomic and h irreducible.

Given $\delta>0$, the writing of $Z(\mathbf{s})$ for $\mathbf{s}\in W(\delta)$ depends of δ :

$$Z\left(\mathbf{s}\right)=\prod_{p\leq M_\delta}h\left(p^{-s_1},\ldots,p^{-s_n}\right)A_{M_\delta}\left(\mathbf{s}\right)\ \ (\mathbf{s}\in W(\delta));$$

where $M_\delta\longrightarrow+\infty$ for δ tends to 0 (according to §7.4 Lemma 29).

We consider as previously for $\theta\in\mathbf{R}^n_{>0}$:

$$t\longmapsto Z(\mathbf{s}^0+t\theta),$$

and its zeros or singularities inside the rectangle $\Xi_{u,\eta}$ $(u, \eta > 0)$.

The main difficulty is that a priori it is possible that the singularities coming from $t \longmapsto A_{M_\delta}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ which accumulate in the neighbourhood at the right of $t = 0$ be cancelled by zeros coming from $t \longmapsto \prod_{p \leq M_\delta} h\left(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}\right)$.

To solve this problem, it suffices to repeat Lemma 30 of §7.4 and Lemma 31 with Remark 29 when h is irreducible to finally obtain the following theorem :

Théorème 37. *Assume that $[h]_e$ is not cyclotomic and that h is irreducible.*

$\partial W(0)$ is a natural boundary for $Z(\boldsymbol{s})$. Precisely, it does not exist any continuation of $Z(\boldsymbol{s})$ to a domain containing an open ball $\mathcal{B}$ centered in a point $\boldsymbol{s}^0$ of the boundary $\partial W(0)$ of $W(0)$.

C.2 Second way : determination of the natural boundary of $Z(\mathrm{s})$ when $[h]_e$ is not cyclotomic considering the zeroes coming from $h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n})$.

Since $[h]_e$ is not cyclotomic, it is possible to determine the natural boundary of $Z(\mathbf{s})$ otherwise.

However it will be necessary to assume that $\mathcal{F}(\alpha_e) \subseteq \partial W(0)$ is a nondegenerate face in the sense of Definition 35 to have a suitable expression of the zeroes of $h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n})$.

Precisely, the accumulation of the zeros or poles which appear in the neighbourhood at the right of $\mathcal{F}(\alpha_e) \subseteq \partial W(0)$ in the previous section was coming from zeros of the Riemann zeta function. In the present case, we will show that there is, in the neighbourhood at the right of $\mathcal{F}(\alpha_e) \subseteq \partial W(0)$, an accumulation of zeros coming from zeros of $h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n})$ (p being a prime number) by giving a quantitative version of §7.4.

So we consider here a point $\mathbf{s}^0$ on the face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ of $\partial W(0)$.

Thus for all $j \in \{1, \ldots, r\}$ $\mathbf{s}^0$ is such that $\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle \geq 0$, and $\langle \sigma^0, \alpha_e \rangle = 0$.

Consider an open ball $\mathcal{B}$ of radius arbitrarily small around $\mathbf{s}^0$.

Moving $\mathbf{s}^0 \in \mathcal{B} \cap \partial W(0)$ if necessary, we can suppose that σ^0 is such that :

$$\langle \sigma^0, \alpha_j \rangle = 0 \iff \alpha_j \in \mathbf{Q}\alpha_e. \tag{C.13}$$

We want to find at least one direction $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbf{N}^n$ such that the function :

$$\begin{array}{ccc} \{t \in \mathbf{C}, \Re(t) > 0\} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & Z\left(\mathbf{s}^0 + t\theta\right), \end{array}$$

cannot be continued beyond the line $\Re(t) = 0$.

We use again the writing of $Z(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ from theorem 28.

We will show that there are many more zeros coming from $\prod_{p\leq M_\delta} h\left(p^{-s_1^0+t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0+t\theta_n}\right)$ than singularities coming from $A_{M_\delta}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ for t inside a small rectangle to the right of the imaginary axis.

Théorème 38. *Suppose that $[h]_e$ is not cyclotomic and that $\mathcal{F}(\alpha_e)$ is a nondegenerate face.*

$\mathcal{F}(\alpha_e)$ is a natural boundary for $Z(\boldsymbol{s})$. Precisely, it does not exist any continuation of $Z(\boldsymbol{s})$ to a domain containing an open ball $\mathcal{B}$ centered in a point $\boldsymbol{s}^0$ of the face $\mathcal{F}(\alpha_e)$ of $\partial W(0)$.

In particular, the number $S(\nu,\eta)$ of zeroes $t_{m,p}$ of the form (C.16) (counted without their multiplicity) in the region $\Delta_{\nu,\eta}$ (for $\nu,\eta,u > 0$) determined by :

$$\Delta_{\nu,\eta} : \begin{array}{l} \frac{1}{\nu+1} < \Re(t) < \frac{1}{\nu} \\ 0 < u < \Im(t) < u + \eta, \end{array}$$

verifies : for all $N \in \mathbf{N}$:

$$S(\nu,\eta) \geq \frac{\eta\,(C_{k_0} - 1)}{\mathcal{K}_N 4\pi} \nu^N,$$

where $\mathcal{K}_N$ is a constant depending on N and $C_{k_0} = \left|c_{k_0}^{-1}\right| > 1$ is the modulus of the inverse of a root c_{k_0} of $[h]_e$ of modulus strictly less than 1.

Preuve. Let $\delta > 0$ and consider a direction $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbf{N}^n$ satisfying :

$$\text{for all } \ell \in \{1,\ldots,n\},\ \theta_\ell > 1. \tag{C.14}$$

Firstly notice that for $\Re(t) > \delta$, the writing :

$$Z(\mathbf{s}^0 + t\theta) = \prod_{p\leq M_\delta} h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0-t\theta_n}\right) A_{M_\delta}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$$

from theorem 28 makes sense because :

$$\forall j \in \{1,\ldots,r\}, \langle \sigma^0 + \theta\Re(t), \alpha_j\rangle \geq \Re(t)\langle\theta,\alpha_j\rangle > \delta\langle\theta,\alpha_j\rangle \geq \delta.$$

Consider the zeros or the singularities of $Z(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ inside the rectangle (for $\nu,\eta,u > 0$) :

$$\Delta_{\nu,\eta} : \begin{array}{l} \frac{1}{\nu+1} < \Re(t) < \frac{1}{\nu} \\ 0 < u < \Im(t) < u + \eta. \end{array}$$

Let's recall the estimation given in the proof of Lemma 31 of the possible zeroes/poles of $A_{M_{\frac{1}{\nu+1}}}\left(\mathbf{s}^0+t\theta\right)$ inside $\Delta_{\nu,\eta}$.

If t_0 is a zero or a singularity of $A_{M_{\frac{1}{\nu+1}}}\left(\mathbf{s}^0+t\theta\right)$ inside $\Delta_{\nu,\eta}$, then there exists $\beta\in\mathbf{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}$ such that $\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\left(s_\ell^0+t_0\theta_\ell\right)$ is a zero or a pole of $\zeta(\cdot)$; and this quantity satisfies necessarily :

$$\Re(t_0)\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\theta_\ell\le\Re\left(\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\left(s_\ell^0+t_0\theta_\ell\right)\right)\le 1;$$

And so :

$$\frac{1}{\nu+1}<\Re(t_0)\le\frac{1}{\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\theta_\ell};$$

which gives :

$$\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\theta_\ell\le(\nu+1).$$

But

$$\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\theta_\ell=\sum_{j=1}^r\beta_j\langle\alpha_j,\theta\rangle\ge\|\beta\|\quad(\text{by }\ (C.14)),$$

Hence :

$$\|\beta\|\le(\nu+1). \tag{C.15}$$

In addition,

$$\Im(t_0)<u+\eta$$

gives :

$$\Im\left(\sum_{l=1}^n\langle\beta,\alpha^\ell\rangle\left(s_\ell^0+t_0\theta_\ell\right)\right)=O\left((\nu+1)(u+\eta)\right).$$

Having fixed $\eta>0$, the number of zeros or singularities of a ζ-factor of $A_{M_{\frac{1}{\nu+1}}}\left(\mathbf{s}^0+t\theta\right)$ is given by :

$$O\left((\nu+1)\log(\nu+1)\right),$$

with regard to a classical result concerning the estimation of the number of nontrivial zeros of the Riemann zeta function having the imaginary part less than $(\nu+1)$. Moreover, the same zero or singularity can, according to $(C.15)$, appear in at most $(\nu+1)^r$ terms; which gives at most :

$$O\left((\nu+1)^{r+1}\log(\nu+1)\right)$$

zeros or singularities coming from $A_{M_{\frac{1}{\nu+1}}}\left(\mathbf{s}^0+t\theta\right)$ inside $\Delta_{\nu,\eta}$ (counted without their multiplicities).

On the other hand, let us estimate the number of zeros $S\left(\nu,\eta\right)$ coming from $\prod_{p\leq M_{\frac{1}{\nu+1}}} h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n}\right)$ inside $\Delta_{\nu,\eta}$.

Put :

$$W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(X,Y\right)=1+a_1p^{-i\langle\gamma^0,\alpha_1\rangle}X^{\langle\sigma^0,\alpha_1\rangle}Y^{\langle\theta,\alpha_1\rangle}+\cdots+a_rp^{-i\langle\gamma^0,\alpha_r\rangle}X^{\langle\sigma^0,\alpha_r\rangle}Y^{\langle\theta,\alpha_r\rangle}.$$

Then, for all prime p, the equality is true :

$$W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(p^{-1},p^{-t}\right)=h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n}\right).$$

We almost come down to consider an Euler product of two variables.

As well as in the proof of Theorem 29, we express Y as a Puiseux series in X in a neighbourhood of 0 such that $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}(X,Y)=0$, which is possible since $\mathcal{F}(\alpha_e)$ is nondegenerate.

The solutions $\Omega_1^p\left(X\right),\ldots,\Omega_f^p\left(X\right)$ for X in a neighbourhood of 0 ($X\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-$), in finite number, can be written as :

$$\forall k\in\{1,\ldots,f\}\,,\Omega_k^p\left(X\right)=c_k^p+c_{k,1}^pX^{\vartheta_k}+\Omega_{k,2}^p\left(X\right),$$

where $c_k^p,c_{k,1}^p\in\mathbf{C}$, $\vartheta_k\in\mathbf{N}^*$, and $\Omega_{k,2}^p\left(X\right)=o\left(X^{\vartheta_k}\right)$;

and satisfy :

$$\forall k\in\{1,\ldots,f\}\,,W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(X,\Omega_k^p\left(X\right)\right)\equiv 0.$$

Consider in particular a branch $\Omega_{k_0}^p$ whose first term $c_{k_0}^p$ is a root of $[h]_e$ of modulus strictly less than 1.

Note $C_{k_0}=|c_{k_0}^p|^{-1}>1$ (note that C_{k_0} does not depend on p according to the property (7.31) of Chapter 7).

For p prime large enough we write :

$$\Omega_{k_0}^p\left(p^{-1}\right)=c_{k_0}^p+c_{k_0,1}^pp^{-\vartheta_{k_0}}+\Omega_{k_0,2}^p\left(p^{-1}\right).$$

The zeros corresponding to the branch k_0 of $W^p\left(p^{-1},p^{-t}\right)=0$ for p prime can be expressed as follows :

$$t_{m,p}=-\frac{\log\left(c_{k_0}^p+c_{k_0,1}^pp^{-\vartheta_{k_0}}+\Omega_{k_0,2}^p\left(p^{-1}\right)\right)}{\log\left(p\right)}+\frac{2\pi mi}{\log\left(p\right)}\tag{C.16}$$

where $m\in\mathbf{Z}$.

To have $t_{m,p}\in\Delta_{\nu,\eta}$, it is necessary that :

$$\frac{1}{\nu+1}<-\frac{\log|c_{k_0}^p+c_{k_0,1}^pp^{-\vartheta_{k_0}}+\Omega_{k_0,2}^p\left(p^{-1}\right)|}{\log\left(p\right)}<\frac{1}{\nu}.\tag{C.17}$$

Let us verify that this inequality is well satisfied for p lying in a suitable interval.

Firstly, we can assume according to Lemma 28 of Chapter 7 that, moving γ^0 generically if necessary, we have $\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right) \neq 0$.

Thus there exists $p_0 \in \mathbf{N}$ such that for $p > p_0$ we have either :

$$\left|1 + \frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}} p^{-\vartheta_{k_0}} + \frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right| > 1 \text{ if } \Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right) > 0; \tag{C.18}$$

or :

$$\left|1 + \frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}} p^{-\vartheta_{k_0}} + \frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right| < 1 \text{ if } \Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right) < 0. \tag{C.19}$$

In the cases $(C.18)$ or $(A.19)$ for ν large enough and

$$\begin{aligned} p &> \max\left(\left[4\nu\left|\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\right|\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu}\right]^{\frac{1}{\vartheta_{k_0}}}, \left[4\left(\nu+1\right)\left|\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\right|\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu+1}\right]^{\frac{1}{\vartheta_{k_0}}}\right) \\ &= \left[4\left(\nu+1\right)\left|\Re\left(\tfrac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\right|\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu+1}\right]^{\frac{1}{\vartheta_{k_0}}}, \end{aligned}$$

(which is possible according to Proposition 9 page 212 because $|c^p_{k,0}| = |c_{k,0}| > 0$ and $|c^p_{k,1}|$ is bounded independently of p),
we get :

$$(-1)^{\varepsilon}\left|1 + \frac{c_{k_0,1}}{c_{k_0}} p^{-\vartheta_{k_0}} + \frac{\Omega_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c_{k_0}}\right|^{-\nu-\varepsilon} < \frac{1 + (-1)^{\varepsilon}\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu+\varepsilon}}{\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu+\varepsilon}} \tag{C.20}$$

where $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

In fact, $(C.18)$ gives :

1. for $\varepsilon = 0$:

$$\left|1 + \frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}} p^{-\vartheta_{k_0}} + \frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu} < 1 < \frac{1 + \left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu}}{\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu}};$$

2. for $\varepsilon = 1$, since $p > \left[4\left(\nu+1\right)\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu+1}\right]^{\frac{1}{\vartheta_{k_0}}}$:

$$\begin{aligned}
&\log\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu-1}\\
=&\left(\left(1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right)\overline{\left(1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right)}\right)^{\frac{-\nu-1}{2}}\\
=&\log\left(1+2\Re\left(\frac{c^p_{k_0},1}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}}+o\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\right)^{\frac{-\nu-1}{2}}\\
=&\frac{-\nu-1}{2}\left(2\Re\left(\frac{c^p_{k_0},1}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}}+o\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\right)\\
>&-2\left(\nu+1\right)\Re\left(\frac{c^p_{k_0},1}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}}\text{ for }\nu\text{ large enough }\left(\nu\geq\nu_0\right)\\
>&-\frac{1}{2}\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}\\
>&\log\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}\right)=-\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}+o\left(\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}\right);
\end{aligned}$$

which gives the equality looked for (for $\nu\geq\nu_0$) :

$$\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu-1}>1-\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{-1-\nu}=\frac{-1+\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{1+\nu}}{\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{1+\nu}}.$$

Similarly, $(C.19)$ gives :

1. for $\varepsilon=0$, since $p>\left[-4\nu\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)\left(C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}\right)^{\nu}\right]^{\frac{1}{\vartheta_{k_0}}}$:

$$\begin{aligned}
&\log\left|1+\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega^p_{k_0,2}\left(p^{-1}\right)}{c^p_{k_0}}\right|^{-\nu}\\
=&\frac{\nu}{2}\left(-2\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}}+o\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\right)\\
<&2\nu\left(-\Re\left(\frac{c^p_{k_0,1}}{c^p_{k_0}}\right)p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\text{ for }\nu\text{ large enough }\left(\nu\geq\nu_1\right)\\
<&\frac{1}{2C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}\\
<&\log\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}\right)=\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}+o\left(\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}\right);
\end{aligned}$$

which guarantees (for $\nu \geq \nu_1$) :

$$\left|1+\frac{c_{k_0,1}^p}{c_{k_0}^p}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega_{k_0,2}^p\left(p^{-1}\right)}{c_{k_0}^p}\right|^{-\nu}<1+\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}\nu}}.$$

2. for $\varepsilon = 1$:

$$\left|1+\frac{c_{k_0,1}^p}{c_{k_0}^p}p^{-\vartheta_{k_0}}+\frac{\Omega_{k_0,2}^p\left(p^{-1}\right)}{c_{k_0}^p}\right|^{-\nu-1}>1>1-\frac{1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}=\frac{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}-1}{C_{k_0}^{\frac{\vartheta_{k_0}}{2}(\nu+1)}}.$$

Now if we choose :

$$C_{k_0}^{\nu}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\leq p\leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right),$$

(which is compatible with the condition over p to have $(C.20)$) then $(C.17)$ holds since according to $(C.20)$:

$$\begin{aligned}
C_{k_0}^{\nu}\left|1+\tfrac{c_{k_0,1}^p}{c_{k_0}^p}p^{-\vartheta_{k_0}}+\tfrac{\Omega_{k_0,2}^p\left(p^{-1}\right)}{c_{k_0}^p}\right|^{-\nu} &< C_{k_0}^{\nu}\left(1+\tfrac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\\
&\leq p\\
&\leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\tfrac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\\
&< C_{k_0}^{\nu+1}\left|1+\tfrac{c_{k_0,1}^p}{c_{k_0}^p}p^{-\vartheta_{k_0}}+\tfrac{\Omega_{k_0,2}^p\left(p^{-1}\right)}{c_{k_0}^p}\right|^{-\nu-1};
\end{aligned}$$

finally taking the logarithm of both sides we deduce $(C.17)$.

Now, $\eta > 0$ being fixed, if we choose ν positive integer such that $\frac{2\pi}{\log\left(C_{k_0}^{\nu}+1\right)} < \eta$, then for all prime p such that :

$$C_{k_0}^{\nu}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\leq p\leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right),$$

we will have $t_{m,p} \in \Delta_{\nu,\eta}$ if and only if :

$$u<\frac{2\pi m}{\log\left(p\right)}-\frac{\arg\left(\Omega_{k_0}^p\left(p^{-1}\right)\right)}{\log\left(p\right)}<u+\eta,$$

which is equivalent to :

$$\frac{u\log(p)}{2\pi}+\frac{\arg\left(\Omega_{k_0}^p\left(p^{-1}\right)\right)}{2\pi}<m<\frac{(u+\eta)\log(p)}{2\pi}+\frac{\arg\left(\Omega_{k_0}^p\left(p^{-1}\right)\right)}{2\pi}. \tag{C.21}$$

So we will have for p fixed $\frac{\eta\log(p)}{2\pi}+\varpi$ zeros $t_{m,p}$ of $W^p_{\mathbf{s}^0,\theta}\left(p^{-1},p^{-t}\right)$ inside $\Delta_{\nu,\eta}$ where $|\varpi|\leq 1$.

Finally, if $S^*(\nu,\eta)$ means the number of zeros or singularities of $\prod_{p\leq M_{\frac{1}{\nu+1}}} h\left(p^{-s_1^0-t\theta_1},\ldots,p^{-s_n^0-t\theta_n}\right)$ inside $\Delta_{\nu,\eta}$ a priori counted with their multiplicity, we get :

$$S^*(\nu,\eta)\geq\sum_{C_{k_0}^{\nu}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\leq p\leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)}\left(\frac{\eta\log(p)}{2\pi}+\varpi\right). \tag{C.22}$$

Taking ν large enough such that $C_{k_0}^{-\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}<\frac{C_{k_0}-1}{2\left(C_{k_0}^{1-\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}+1\right)}$ and using the prime number theorem (i.e. $\sum_{p\leq x}\log(p)\sim x$), $(C.22)$ gives :

$$\begin{aligned} S^*(\nu,\eta) &\geq \frac{C_{k_0}^{\nu}\eta\left(C_{k_0}-1\right)}{4\pi}-\sum_{C_{k_0}^{\nu}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)\leq p\leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)} 1 \\ &\geq \frac{C_{k_0}^{\nu}\eta\left(C_{k_0}-1\right)}{4\pi}-\frac{C_{k_0}^{\nu+1}}{\log\left(C_{k_0}^{\nu+1}\right)} \\ &\sim \frac{C_{k_0}^{\nu}\eta\left(C_{k_0}-1\right)}{4\pi}. \end{aligned}$$

To be able to minorate $S(\nu,\eta)$, we want to establish a majoration of the multiplicity of a zero or a singularity $t_{m,p}$.

So given a prime number p and an integer m, we try to majorate :

$$\mathcal{M}(m,p)=\#\left\{(m',p')\mid m'\in\mathbf{Z},p'\text{ prime},\ t_{m,p}=t_{m',p'}\right\}.$$

Notice that we can consider without loss of generality that if p' is such that there exists an integer m such that $t_{m,p}=t_{m',p'}$, then $p'\geq p$.

On the other hand we have :

$$\begin{array}{l} -\log \Omega_{k_0}^{p}\left(p^{-1}\right) = -\log\left(c_{k_0}^{p}\right) + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right); \\ -\log \Omega_{k_0}^{p}\left(p'^{-1}\right) = -\log\left(c_{k_0}^{p}\right) + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right). \end{array} \tag{C.23}$$

Furthermore according to the property (7.31) of Chapter 7 we can write for all prime number p :

$$c_{k_0}^{p} = c_{k_0} p^{i\frac{\langle \gamma^0, \alpha_e\rangle}{\langle \theta, \alpha_e\rangle}},$$

where c_{k_0} does not depend on p.

Moreover remark that $\Re\left(\log\left(c_{k_0}\right)\right) = \log\left|c_{k_0}\right| \neq 0$ because $\left|c_{k_0}\right| = \left|c_{k_0}^{p}\right| < 1$.

With regard to $(C.23)$, the equality $t_{m,p} = t_{m',p'}$ gives :

$$\frac{-\log\left(c_{k_0}\right) + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)}{\log\left(p\right)} + \frac{2i\pi m}{\log\left(p\right)} = \frac{-\log\left(c_{k_0}\right) + O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)}{\log\left(p'\right)} + \frac{2i\pi m'}{\log\left(p'\right)}. \tag{C.24}$$

By identifying the real and imaginary parts of $(C.24)$, we obtain the estimations :

$$\begin{cases} -\log\left|c_{k_0}\right|\left(\frac{1}{\log\left(p\right)} - \frac{1}{\log\left(p'\right)}\right) & = O\left(\frac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log\left(p\right)}\right), \\ -\arg\left(c_{k_0}\right)\left(\frac{1}{\log\left(p\right)} - \frac{1}{\log\left(p'\right)}\right) + 2\pi\left(\frac{m}{\log\left(p\right)} - \frac{m'}{\log\left(p'\right)}\right) & = O\left(\frac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log\left(p\right)}\right). \end{cases}$$

And since $\log\left|c_{k_0}\right| \neq 0$, it follows :

$$\begin{cases} \frac{1}{\log\left(p\right)} - \frac{1}{\log\left(p'\right)} & = O\left(\frac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log\left(p\right)}\right), \\ \frac{m}{\log\left(p\right)} - \frac{m'}{\log\left(p'\right)} & = O\left(\frac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log\left(p\right)}\right). \end{cases} \tag{C.25}$$

The first line of $(C.25)$ enables us to claim that :

$$\log\left(p'\right) - \log\left(p\right) = O\left(\frac{\log\left(p'\right)}{p^{\vartheta_{k_0}}}\right).$$

Consequently there exists an absolute constant A_1 such that if p' is such that there exists m' satisfying $t_{m',p'} = t_{m,p}$ then :

$$\log\left(p'\right) - \log\left(p\right) \leq A_1 \frac{\log\left(p'\right)}{p^{\vartheta_{k_0}}}.$$

So we have :

$$\log\left(p'\right) \leq \frac{\log\left(p\right)}{1 - \frac{A_1}{p^{\vartheta_{k_0}}}} \leq \log\left(p\right)\left(1 + \frac{A_2}{p^{\vartheta_{k_0}}}\right);$$

where A_2 is an absolute constant (for example we can choose $A_2 = 2A_1$).

If there exists m' such that $t_{m',p'} = t_{m,p}$, then p' satisfies necessarily

$$p' \leq p^{1+\frac{A_2}{p^{\vartheta_{k_0}}}}. \tag{C.26}$$

For fixed p, let us count the number $\mathcal{M}'(p)$ of p' satisfying $(C.26)$.

For this we use the prime number theorem which gives the following estimation for the number of prime numbers $\pi(x)$ less than x :

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)} + O\left(xe^{-c\sqrt{\log(x)}}\right);$$

where c is an explicit absolute constant.

So we have :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}'(p) &= \pi\left(p^{1+A_2p^{-\vartheta_{k_0}}}\right) - \pi(p) \\ &= \int_2^{p^{1+A_2p^{-\vartheta_{k_0}}}} \frac{dt}{\log(t)} + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right).\end{aligned}$$

But we have uniformly in $t \in \left[p, p^{1+A_2p^{-\vartheta_{k_0}}}\right]$:

$$\log(t) = \log(p) + O\left(\log(p)\, p^{-\vartheta_{k_0}}\right);$$

which gives :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}'(p) &= \frac{1}{\log(p) + O\left(\log(p)\, p^{-\vartheta_{k_0}}\right)}\left(p^{1+A_2p^{-\vartheta_{k_0}}} - p\right) + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right) \\ &= O\left(\frac{p}{\log(p)}\left(p^{A_2p^{-\vartheta_{k_0}}} - 1\right)\right) + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right) \\ &= O\left(\frac{p}{\log(p)}\left(e^{A_2\log(p)p^{-\vartheta_{k_0}}} - 1\right)\right) + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right) \\ &= O\left(p^{1-\vartheta_{k_0}}\right) + O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right) \\ &= O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right).\end{aligned}$$

Now, having fixed an integer $m \in \mathbf{Z}$ and a prime p , we consider a prime p' satisfying $(C.26)$ and we look for an estimation of the integers m' such that $t_{m,p} = t_{m',p'}$.

Thanks to $(C.25)$, we get :

$$\frac{m}{\log(p)} - \frac{m'}{\log(p')} = O\left(\frac{1}{p^{\vartheta_{k_0}}\log(p)}\right).$$

But since p' satisfies $(C.26)$, we have :

$$\log(p') = \log(p) + O\left(\log(p)\, p^{-\vartheta_{k_0}}\right);$$

and consequently :

$$\begin{array}{lcl} m - m'\dfrac{\log(p)}{\log(p')} & = & O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right) \\ m - m'\left(\dfrac{1}{1+O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)}\right) & = & O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right) \\ m - m'\left(1+O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right)\right) & = & O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right) \\ m - m' & = & O\left(p^{-\vartheta_{k_0}}\right) + O\left(m'p^{-\vartheta_{k_0}}\right). \end{array}$$

Besides that, if $t_{m',p'} \in \Delta_{\nu,\eta}$, then thanks to $(C.21)$ m' must satisfy :

$$m' = O\left(\log(p')\right) = O\left(\log(p)\right);$$

Hence :

$$m - m' = O\left(\log(p)\, p^{-\vartheta_{k_0}}\right).$$

In particular, for p large enough, $p > p_1$ (p_1 being an absolute constant), we deduce :

$$|m - m'| < \frac{1}{2};$$

and :

$$m = m'.$$

So if $p > p_1$, the couples (m', p') such that $t_{m',p'} = t_{m,p}$ satisfy necessarily $m = m'$.

And finally :

$$\mathcal{M}(m,p) = \mathcal{M}'(p) = O\left(pe^{-c\sqrt{\log(p)}}\right).$$

To conclude, if p is such that $C_{k_0}^{\nu}\left(1+\frac{1}{C_{k_0}^{\nu\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right) \leq p \leq C_{k_0}^{\nu+1}\left(1-\frac{1}{C_{k_0}^{(\nu+1)\frac{\vartheta_{k_0}}{2}}}\right)$, then for all $N \in \mathbf{N}$, there exists in particular a constant $\mathcal{K}_N$ which depends on N such that for all $m \in \mathbf{N}$:

$$\mathcal{M}(m,p) \leq \mathcal{K}_N \frac{C_{k_0}^{\nu}}{\nu^N}.$$

So for all $N \in \mathbf{N}$, we finally have :

$$S(\nu,\eta) \geq \frac{S^*(\nu,\eta)}{\mathcal{K}_N \frac{C_{k_0}^{\nu}}{\nu^N}} \sim \frac{\eta\left(C_{k_0}-1\right)}{\mathcal{K}_N 4\pi}\nu^N.$$

For $N > r+1$, we have in particular that $(\nu+1)^{r+1}\log(\nu+1) = o(S(\nu,\eta))$ as ν tends to infinity.

As a conclusion, the singularities of $A_{M_{\frac{1}{\nu+1}}}(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ inside $\Delta_{\nu,\eta}$ cannot entirely cancel the zeros coming from $\prod_{p \leq M_{\frac{1}{\nu+1}}} h\left(p^{-s_1^0 - t\theta_1}, \ldots, p^{-s_n^0 - t\theta_n}\right)$.

So there is an accumulation of zeros of $Z(\mathbf{s}^0 + t\theta)$ inside $\Delta_{\nu,\eta}$.

Thus, $\partial W(0) \cap \mathbf{R}^n$ is the natural boundary of $Z(\mathbf{s})$; which completes the proof of the theorem. $\square$

Bibliographie

[1] S. S. Abhyankar *Local Analytic Geometry*, Pure and Applied Mathematics, 14, Academic Press, 1964

[2] G. Bhowmik, D. Essouabri and B. Lichtin, *Meromorphic continuation of multivariable Euler products*, Forum Math. 19(6) :1111-1139, 2007

[3] Bohr and Landau, C. R., t. 158, p. 106-110, 1913

[4] R. de la Bretèche, *Sur le nombre de points de hauteur bornée d'une certaine surface cubique singulière* Astérisque 251, 51–77, 1998

[5] R. de la Bretèche, *Compter des points d'une variété torique*, J. Number Theory, vol. 87, No 2, 315-331, 2001

[6] R. de la Bretèche, Sir P. Swinnerton-Dyer, *Fonction zêta des hauteurs associée à une certaine surface cubique* Bulletin de la SMF 135, 65–92, 2007

[7] A. Chenciner, *Courbes Algébriques Planes*, 2008

[8] G. Dhalquist, *On the analytic continuation of Eulerian product*, Ark. Mat., 1 :533-554, 1952

[9] M. du Sautoy, *Zeta Functions of Groups and Natural Boundaries*, preprint, 2000

[10] M. du Sautoy and F. Grunewald, *Zeta functions of groups : zeros and friendly ghosts*, Amer. J. Math., 124(1) :1-48, 2002.

[11] M. du Sautoy and L. Woodward, *Zeta Functions Of Groups And Rings*, Lecture Notes in Mathematics 1925, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008

[12] T. Estermann, *On certain functions represented by Dirichlet series*, Proc. London Math. Soc. (2), 27 :435-448, 1928

[13] F.J. Grunewald, D. Segal and G.C. Smith, *Subgroups of finite index in nilpotent groups*, Invent. Math. 93 : 185-223, 1988

[14] Hardy and Littlewood, Math. Zeitschr. 10, p. 283-317, 1921

[15] N. Kurokawa, *On the meromorphy of Euler products, Part I : Artin type*, Tokyo Institute of Technology preprint, 1977.

[16] N. Kurokawa, *On the meromorphy of Euler products*, Proceedings of the Japan Academy, 54A, 163-166, 1978.

[17] N. Kurokawa, *On Linnik's problem*, Proceedings of the Japan Academy, 54A, 167-169, 1978.

[18] N. Kurokawa, *On the meromorphy of Euler products I*, Proc. London Math. Soc. (3), 53(1) : 1-47, 1986

[19] N. Kurokawa, *On the meromorphy of Euler products II*, Proc. London Math. Soc. (3), 53(2) : 209-236, 1986

[20] N. Kurokawa and H. Ochiai, *A multivariable Euler product of Igusa type and its applications*, Journal of Number Theory 129, 1919-1930, 2009

[21] E. Landau and A. Walfisz, *Über die Nichtfortsetzbarkeit einiger durch Dirichletsche Reihen definierter Funktionen*, Rendiconti di Palermo, 44, 82-86, 1920

[22] Ch. Laurent-Thiébaut, *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables*, Savoirs Actuels InterEditions/CNRS Editions, 1997

[23] J. McDonald, Journal of Pure and Applied Algebra 104 : 213-233, 1995

[24] B. Z. Moroz, *Euler products (variation on a theme of Kurokawa's)*, Astérisque, 94, 143-151, 1982

[25] B. Z. Moroz, *On a class of Dirichlet series associated to the ring of representations of a Weil group* Proc. London Math. Soc. (3), 56(2) : 209-228, 1988

[26] R. Michael Range, *Extension Phenomena in Multidimensional Complex Analysis : Correction of the Historical Record*, The Mathematical Intelligencer Springer-Verlag New York, 2002

[27] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, troisième édition Collection Echelles Belin, 2008

[28] O. J. Velásquez Castañón, *Sur la répartition des zéros de certaines fonctions méromorphes liées à la fonction zêta de Riemann*, thesis presented at the University of Bordeaux on September 18, 2008

[29] Robert J. Walker, Algebraic curves, Springer-Verlag New York, 1978

Domaine de méromorphie maximal et frontière naturelle de produits eulériens uniformes d'une ou de plusieurs variables.

Résumé :

Le but de cette thèse est de déterminer la frontière naturelle de méromorphie (lorsqu'elle existe) d'un produit eulérien de n variables ($n \geq 2$) associé à un polynôme $h \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n], h(\mathbf{0}) = 1$ vérifiant une hypothèse de régularité analytique. Il s'agit précisément de trouver la frontière d'un domaine maximal sur lequel un prolongement méromorphe existe. On présente dans cette thèse des méthodes qui permettent d'étendre dans le cadre de plusieurs variables, sous une hypothèse de régularité analytique qui est vérifiée dans la plupart des cas, le célèbre résultat d'Estermann concernant le domaine maximal de méromorphie d'un produit eulérien d'une variable $\prod_p h(p^{-s})$ associé à un polynôme h à coefficients entiers (tel que $h(0) = 1$). On précise également le sens que l'on peut attribuer au concept de "frontière naturelle" selon la dimension complexe ou réelle d'un éventuel prolongement au-delà de cette frontière.

En guise d'application, on détermine la frontière naturelle d'une classe de produits eulériens multivariables associés à une variété torique projective.

Une seconde application consiste en la détermination de la frontière naturelle d'une classe de fonctions de la forme $\prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c})$ où $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. On résout en particulier un problème de N. Kurokawa et H. Ochiai concernant la frontière naturelle de méromorphie de la fonction zêta multivariable d'Igusa $Z^{\mathrm{ring}}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}])$.

Mots-clés : Produits eulériens multivariables, prolongement méromorphe, frontière naturelle, polynôme cyclotomique, point rationnel sur une variété torique.

Maximal Domain of meromorphy and natural boundary of uniform Euler products of one or many variables.

Abstract :

The aim of this thesis is to determine the natural boundary of meromorphy (when it exists) of an Euler product of n variables ($n \geq 2$) associated to a polynomial $h \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n], h(\mathbf{0}) = 1$ satisfying an hypothesis of analytic regularity. Precisely it consists in finding the boundary of a maximal domain on which a meromorphic extension exists. We present in this thesis some methods which permit to extend in the multivariable case, under an hypothesis of analytic regularity which is mostly satisfied, the well-know result of Estermann concerning the maximal domain of meromorphy of an one variable Euler product $\prod_p h(p^{-s})$ associated to a polynomial h with integral coefficients (such that $h(0) = 1$). We also precise the sense which we can give to the concept of "natural boundary" with regard to the real or complex dimension of a possible continuation beyond this boundary.

As an application, we determine the natural boundary of a class of Euler products associated to a projective toric variety.

A second application consists in the determination of the natural boundary of a class of Euler products of the form $\prod_p h(p^{-s_1}, \ldots, p^{-s_n}, p^{-c})$ where $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. In particular we solve a problem of N. Kurokawa and H. Ochiai concerning the natural boundary of meromorphy of the multivariable Igusa zeta function $Z^{\mathrm{ring}}(s_1, \ldots, s_n; \mathbf{Z}[T, T^{-1}])$.

Keywords : multivariables Euler products, meromorphic continuation, natural boundary, cyclotomic polynomial, rational point on a toric variety.